



4.3 Seriation von Zahlen

EXPLORATION

Eine grundlegende Zahlbeziehung ist *einer mehr/um eins mehr* oder entsprechend *einer weniger/um eins weniger*. Entlang dieser Zahlbeziehung kann man den Aufbau der natürlichen Zahlen verstehen: Das Zahlssystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der Seriation um eins aufgebaut. Die nächste Zahl (der *Nachfolger*) ist einer/um eins mehr. Die vorangegangene Zahl (der *Vorgänger*) ist um eins weniger.

Das Beherrschen der Zahlwortreihe ist das eine. Um Zahlen richtig und bewusst miteinander zu verknüpfen, ist zusätzlich der Gedanke fundamental, dass nachfolgende natürliche Zahlen immer um eins größer sind. Umgekehrt sind vorangehende natürliche Zahlen immer um eins kleiner.

Das Wort *um* zu verwenden ist sinnvoll, aber nicht notwendig. Es bezieht den mathematischen Unterschiedsgedanken deutlicher ein.

4.3.1 Kursgespräch und Gruppenarbeit – Zahlbeziehungen und Seriation

Didaktische Ziele

- die Seriationslogik in der Zahlwortreihe erkunden (Der Nachfolger einer Zahl ist immer um eins mehr als die Zahl selbst. Der Vorgänger einer Zahl ist immer um eins weniger als die Zahl selbst.)
- die Seriation um 1 in Fragen wie „Was ist um 1 mehr als/um 1 weniger als“ anwenden

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen kennen die Zahlwortreihe und können zählen. Um rechnen zu lernen, reicht das aber nicht aus.

Es muss auf der Mengenebene verstanden werden, wie die Zahlreihe aufgebaut ist und daraus abgeleitet werden, welche Beziehungen zwischen den Zahlen bestehen. Ziel ist es, davon ausgehend zu abstrahieren, dass die Fünf aus fünf *Einsen* oder *Einern* aufgebaut ist, die Vier aus vier Einsen oder Einern. Das ist ein Einer weniger als fünf Einer. Deshalb ist die Vier einer weniger als die Fünf und die Fünf ist einer mehr als die Vier.

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, sich an einem Tisch (je nach Platzbedarf sollten mehrere Tische zusammengestellt werden) zusammenzufinden und gemeinsam Material zuzuordnen.

Es können Materialien wie Steckwürfel, Holzwürfel, Figuren, Chips, Fingerbilder, Würfelbilder, Karten u. ä. verwendet werden. Für die Übung werden Zahlkarten mit den Zahlen 1 bis 10 benötigt, die die Teilnehmer*innen auf bereitgelegten kleinen Karteikarten selbst beschriften.

Die Aufgabe für die Teilnehmer*innen lautet:

Ordnen Sie weitere Karten und verschiedene Materialien den Karteikarten mit den Zahlen (von 1 bis 10) zu.

Finden Sie zu jeder Zahlkarte eine „Zuordnungsgruppe“ und ordnen Sie dafür jeder Zahl eine Mengen zu.

Wenn Sie fertig sind, besprechen und vergleichen Sie gemeinsam die verschiedenen Zuordnungsgruppen.

Die Kursleitung moderiert diesen Prozess mit Fragen.

Wodurch unterscheiden sich die Zuordnungsgruppen? Wo liegt jeweils einer mehr?

Wo liegt jeweils einer weniger?

Wie sollten die Zuordnungen am sinnvollsten angeordnet werden? Warum ist das sinnvoll?

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, die Zuordnungen sinnvoll zu ordnen. Welche Möglichkeiten schlagen die Teilnehmer*innen vor:

- Es sind immer gleich viele.
- Es soll immer einer mehr sein.
- Es soll immer einer weniger sein.
- Oder andere?

Das Ordnungsprinzip „immer einer mehr“ verdeutlichen zum Beispiel nachfolgende Abbildungen.

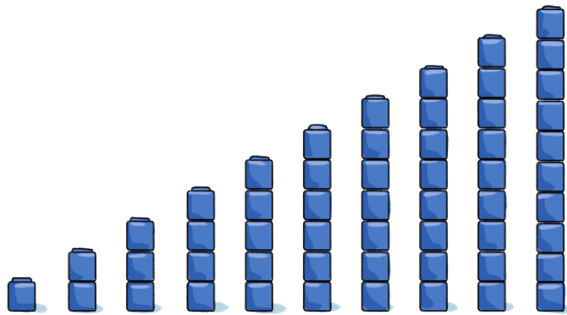


Abbildung 4.3-1 Mögliche Anordnung von Steckwürfeln – Immer einer mehr

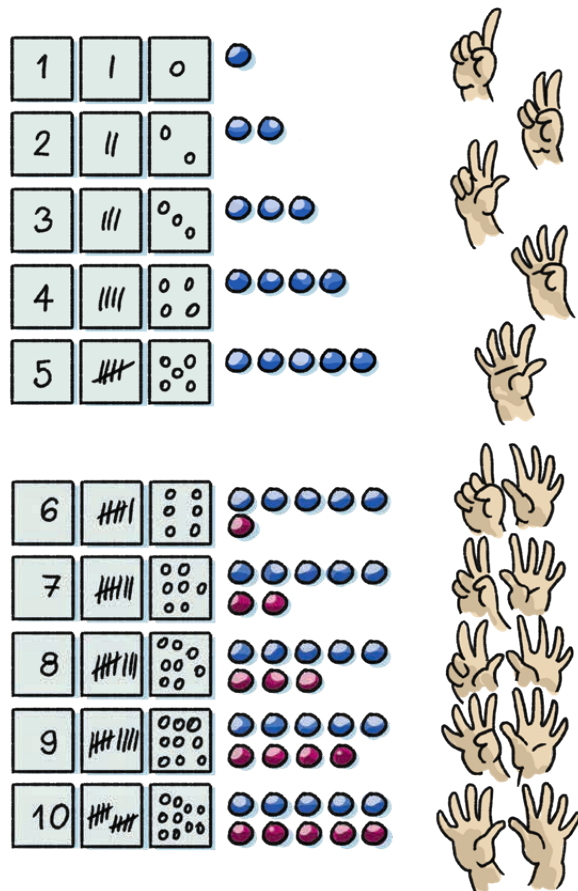


Abbildung 4.3-2 Mögliche Anordnung anderer Zählweisen – immer einer mehr.

Am Ende des aufsteigenden Ordnen der unterschiedlichen Materialien soll die Erkenntnis stehen: Es ist immer einer mehr, es kommt immer einer dazu.⁴

Entsprechend beim absteigenden Ordnen: Es ist immer einer weniger. Es wird immer einer entnommen.

Auch hier ist ein wesentlicher Aspekt des Kursgesprächs, dass die Teilnehmer*innen dafür eigenständige Formulierungen finden.

Die Kursleitung fragt nach.

Wie kann man das gewählte Ordnungsprinzip beschreiben? Beschreiben Sie die Anordnung. Wie hat man die Mengen geordnet?

Mögliche Antwort:

Es kommt immer ein Element dazu. Es ist immer ein Element weniger. Es ist immer einer mehr/weniger.

Was fällt Ihnen auf?

Mögliche Antwort:

Alle Fünfermengen bestehen aus fünf Elementen. Dafür kann man die Zahl Fünf schreiben.

Gilt das für alle Zahlen?

Mögliche Antwort:

Zahlen stehen für die Anzahl der Elemente von Mengen.

Wofür steht z. B. die Zahl 8? – Auch weitere Fragen zu anderen Zahlen.

Mögliche Antwort:

Die Zahl 8 besteht aus acht Einern. Sie beschreibt alle Mengen mit acht Elementen.

Welche Zahl ist einer mehr/weniger als acht?

Mögliche Antwort:

Neun ist einer mehr als acht und sieben ist einer weniger als acht.

Gilt das genauso für acht Chips wie für acht Steckwürfel oder Bilder der Acht?

Mögliche Antwort:

Ja, das gilt für alle Achter-Mengen.

Jemand sagt: „Neun ist einer mehr als acht und sieben ist einer weniger als acht?“ Gilt das immer oder kann es Situationen geben, in denen das nicht gilt?

Mögliche Antwort:

Das gilt immer. Neun ist immer einer mehr als acht und sieben ist immer einer weniger als acht.

Ausblick: Das führt weiter zum Thema Unendlichkeit. Wird immer ein weiterer Einer hinzugefügt, gibt es kein Ende. Auch für jede große Zahl gibt es immer eine größere.

HINWEIS

Steht für den Unterricht kein Material zur Verfügung, könnte die Aufgabe für die Gruppenarbeit darin bestehen, Zeichnungen anzufertigen, auf denen verschiedene Darstellungen der Zahlen eins bis zehn skizziert werden.

Entwickeln Sie verschiedene Visualisierungen, z.B. Kreise, Quadrate, Striche, auch Fingerbilder. Nutzen Sie Würfel oder andere Gegenstände, die sich ordnen lassen.

Die Kursleitung könnte dafür Beispiele an der Tafel vorgeben. Anschließend präsentieren alle Gruppen ihre Skizzen.

Die Kursleitung fasst an einem konkreten Beispiel zusammen.

BEISPIEL

Fünf ist immer einer weniger/um eins weniger als sechs. Fünf ist immer einer mehr/um eins mehr als vier.

Die Zahl 5 kann immer in fünf Einer zerlegt werden.

Diese Erkenntnisse gelten für alle Mengen, in denen sich fünf Elemente befinden und damit für die Zahl 5.

Die Zahl 5 repräsentiert alle Mengen mit fünf Elementen.

Die Zahl 5 ist abstrakt (ein Gedankenkonstrukt) und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden.

Dieses Beispiel sollte als Overhead-Folie oder mit einem Beamer für die Teilnehmer*innen sichtbar sein.

Anschließend fordert die Kursleitung einzelne Teilnehmer*innen auf, dieses Fazit auf andere Zahlen zu übertragen.

Drei ist immer einer weniger als vier.

Drei ist immer einer mehr als zwei.

Die Zahl 3 kann man immer in drei Einer zerlegen.

Diese Erkenntnisse gelten für alle Mengen, in denen sich drei Elemente befinden und damit für die Zahl 3.

Die Zahl 3 steht für *alle* Mengen mit drei Elementen.

Die Zahl 3 ist abstrakt (sie kann auch nur in Gedanken sein) und muss nicht für eine konkrete Menge stehen.

Um zu überprüfen, ob die Teilnehmer*innen sichere Kenntnisse zu folgenden Fragestellungen haben:

- Welche Zahl ist einer/um eins mehr als ...?
- Welche Zahl ist einer/um eins weniger als ...?

bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen sich hintereinander eine Frage und eine Zahl zu überlegen und diese der*dem Nachbar*in im Kursgespräch laut zu stellen. Ein*e Teilnehmer*in beginnt. Zum Beispiel so:

- Frage A:** Welche Zahl ist einer mehr als 4?
 - Antwort A:** Es ist 5. **Frage B:** Welche Zahl ist einer weniger als 7?
 - Antwort B:** Es ist 6. **Frage:** Welche Zahl ist einer mehr als 1?
- ...

Man kann Zahlen durch das Prinzip „immer einer mehr“, „immer einer weniger“ in folgender Weise darstellen; dabei spricht man von *Seriation um eins* – die Zahlen gehen in Serie:

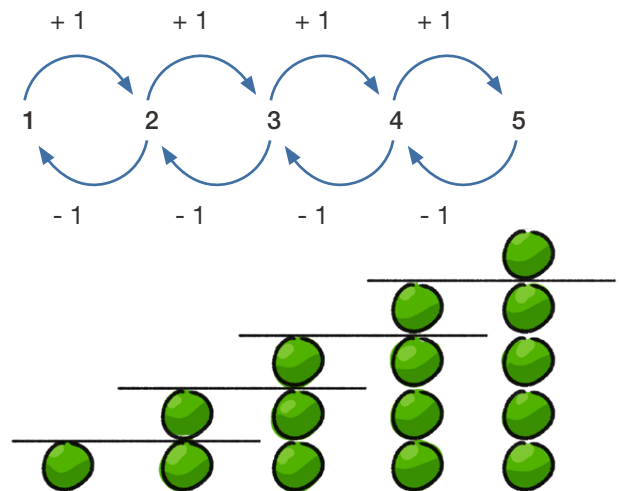


Abbildung 4.3-3 Natürliche Zahlen – Seriation um eins und Darstellung als Mengen – Immer einer mehr

Jeder Zahl folgt durch Addition von eins eine weitere Zahl.

Bereits vor der Schulzeit können die meisten Kinder zählen. Bei der aufsteigenden Zahlreihe unterscheiden sich die Zahlen immer um $+ 1$. Das wird klar, wenn man die Zahlen als Anzahlen begreift.

$$1 = 1$$

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Symbolisch kann man „einer mehr“ mit „ $+ 1$ “ angeben und „einer weniger“ mit „ $- 1$ “. Wenn n für eine Zahl steht, so ist $n + 1$ der Nachfolger und $n - 1$ der Vorgänger.

DEFINITION

Eine mögliche Definition natürlicher Zahlen lautet:

Die Zahlen 0, 1, 2, 3 ... bilden die Menge der natürlichen Zahlen.

Die natürliche Zahl n ist eine Abstraktion von konkreten, endlichen Mengen mit n Elementen. Damit steht jede natürliche Zahl für eine Klasse gleichmächtiger Mengen.

Die so gewonnene Zahl heißt Kardinalzahl.

Da sich alle benachbarten natürlichen Zahlen um eins unterscheiden gilt folgende Abstraktion:

Der Nachfolger einer natürlichen Zahl n ist $n + 1$. Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger hat, gibt es keine größte natürliche Zahl.

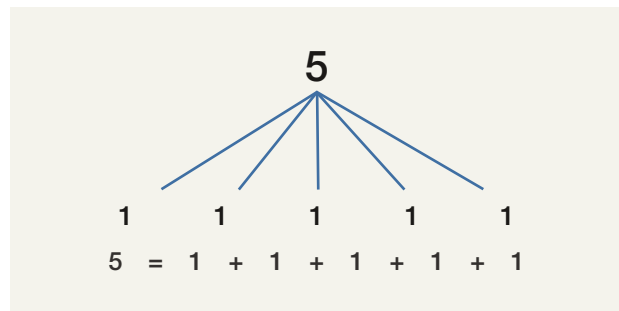
Mit Ausnahme von 0 hat jede natürliche Zahl einen Vorgänger $n - 1$.⁵

Um darüber zu sprechen, ist es günstig, diese Definition für alle sichtbar anzuzeigen (Overhead-Projektor, Beamer).

An dieser Stelle bietet es sich an, mit Hilfe von Materialien oder Abbildungen erneut den Zusammenhang zwischen (abstrakten natürlichen) Zahlen und Mengen darzustellen.

Das heißt allgemein: Jede Menge besteht aus n Elementen.

Die natürliche Zahl n steht für die Mächtigkeit jeder Menge, die aus n Elementen besteht. Die Mächtigkeit bezeichnet die Anzahl der Einer in der Menge. Das bedeutet, dass eine natürliche Zahl aus Einern besteht. Nachfolgend ist $n = 5$.



Statt zu sagen, dass in der Fünf immer fünf Einer enthalten sind, kann auch gesagt werden: Die Fünf besteht aus fünf Einern. Sie setzt sich aus fünf Einern zusammen.

*Dafür kann geschrieben werden:
 $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.*

Die Zahl 5 steht für die Mächtigkeit jeder Menge, die aus fünf Elementen besteht. Es sind Fünfer-Mengen.



5 Scheren

5 Mondsymbole

5 Uhren

Abbildung 4.3-4 Die Zahl 5 steht für beliebige Mengen mit fünf Elementen – Fünfer-Mengen

Gemeinsam mit den Teilnehmer*innen werden weitere Beispiele natürlicher Zahlen besprochen.

Stellen Sie eine Menge mit vier Elementen dar.

Können Sie zwischen einer Menge aus vier Elementen und der Zahl 4 unterscheiden?

Ist das (Zeichnung an der Tafel, z. B. ■ ■ ■ ■) eine Vierer-Menge? Wie viele Elemente sind in der Vierer-Menge enthalten?

Was wissen Sie über die Zahl 4?

Wie viele Einer sind in der Vier enthalten? Welche Zahl ist der Nachfolger/Vorgänger der Vier?

4.3.2 Kursgespräch – Seriation um zwei, Seriation um x und Aufgabenblatt 4.3a ...mehr/weniger als

Didaktische Ziele

- einfache, geordnete Zahlenreihen/Serien erkunden, fortsetzen und eventuell selbst entwickeln
- Serien beschreiben und Zusammenhänge zwischen Zahlen versprachlichen

Folgende Frage soll diskutiert werden und mit Darstellungen an der Tafel illustriert werden.

Wenn es die Seriation um eins gibt, sind auch weitere Seriationen möglich? Zum Beispiel die Seriation um zwei:

Zwei mehr als drei sind fünf, zwei mehr als fünf sind sieben, zwei mehr als sieben sind neun. Deswegen sind drei zwei weniger als fünf, fünf sind zwei weniger als sieben und sieben sind zwei weniger als neun.

Die Zeichnungen an der Tafel erklären das.

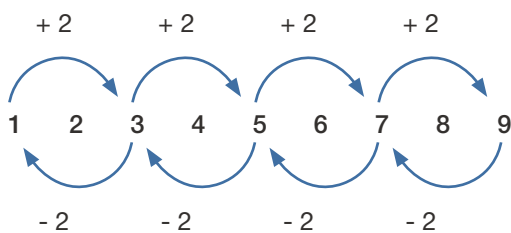


Abbildung 4.3-5 Natürliche Zahlen – Seriation um zwei

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 2 &= 1 + 1 \\
 3 &= 1 + 1 + 1 \\
 4 &= 1 + 1 + 1 + 1 \\
 5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.3-6 Natürliche Zahlen – Seriation um zwei

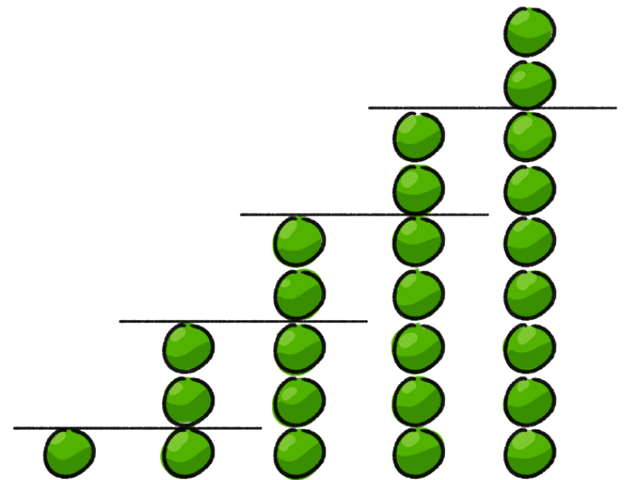


Abbildung 4.3-7 Seriation um zwei – Darstellung als Mengen – Immer zwei mehr

Die Serie „immer zwei mehr“ kann man beliebig fortsetzen. Im oberen Beispiel beginnt die Serie bei eins.

Beginnt die Serie bei zwei, sind zwei mehr vier. Danach folgen sechs, acht, zehn, usw. Einfache, geordnete Zahlenreihen entstehen aus Seriationen.

BEISPIELE

Serie: Immer + 1

5, 6, 7, 8, 9, ...

Serie: Immer – 1

9, 8, 7, 6, ...

Serie: Immer + 2

2, 4, 6, 8, ...

Serie: Immer – 2

9, 7, 5, 3, 1

Serie: Immer + 3

1, 4, 7, 10, ...

Serie: Immer – 3

8, 5, 2

AUSBLICK

Wenn die Teilnehmer*innen selbstständig den Gedanken der Seriation aufnehmen möchten und weitere Zahlenreihen/Serien entwickeln wollen, auch über die Zehn hinaus, unterstützt die Kursleitung dieses Kursgespräch. Da die natürlichen Zahlen eine kleinste Zahl haben, enden absteigende Serien.

Die Kursleitung setzt zusammenfassend das **Aufgabenblatt 4.3 a** ... *mehr/weniger als* ein. Dieses Aufgabenblatt ist auch zur Wiederholung für zu Hause geeignet. In der Selbstreflexion ist es für die Teilnehmer*innen wichtig zu erkennen, dass sie die in den Lücken gesuchten Zahlen routiniert finden und dass sie die Zusammenhänge versprachlichen können.

Nachdem das **Aufgabenblatt 4.3 a** ausgefüllt wurde, vergleichen die Teilnehmer*innen, jede*jeder für sich, die eigenen Antworten mit dem **Lösungsblatt 4.3 a**. Die Kursleitung überprüft den Lernstand der einzelnen Teilnehmer*innen. Je nachdem, wie der Vergleich der selbstständigen und vorgegebenen Lösungen ausfällt, entscheidet die Kursleitung, ob Formulierungen bzw. die Seriation erneut besprochen werden müssen.

RÜCKSCHAU

Grundsätzlich baut das Zahlssystem der natürlichen Zahlen auf der Seriation um eins auf. Der Vorgänger einer Zahl ist einer weniger als diese Zahl und der Nachfolger ist einer mehr als diese Zahl. Allgemein wird eine natürliche Zahl durch die Variable n ausgedrückt, deren Nachfolger durch $n + 1$ sowie deren Vorgänger durch $n - 1$.