11.6 Addition und Subtraktion ohne Zehner-/Hunderterübergang

EXPLORATION

Bei der Addition und Subtraktion hilft das Zerlegen der Zahlen in die Stellenwerte. Ist das Stellenwertsystem und das Zerlegen von mehrstelligen Zahlen in die Stellenwerte verstanden, lassen sich Additions- und Subtraktionsaufgaben ohne Zehner- und/oder Hunderterübergänge ohne normierten Algorithmus, also nicht schriftlich, leicht lösen, indem stellen- oder schrittweise gerechnet wird.

Es werden hier verschiedene Aufgaben betrachtet mit jeweils abweichender Anzahl von Stellen. In Abhängigkeit von den konkreten Zahlen bietet sich jeweils auch die Nutzung verschiedener Zahldarstellungsformen zur Verdeutlichung von Rechenstrategien an, die in diesem Abschnitt bzgl. ihrer Eignung betrachtet werden.

Diese sind die Stellenwerttabelle und die Mehrsystemblöcke, der Rechenstrich, das Tausenderfeld sowie die halbschriftliche Notation.

11.6.1 Mathekonferenz – Addition mit dreistelligen Zahlen [10]

Didaktische Ziele

- Rechenstrategien für Additionen ohne Stellenüberschreitungen erkunden („Stellenwerte extra“ oder „Schrittweise“)
- verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, Rechenstrategien darzustellen (Systemmaterial, Stellenraster, Rechenstrich, halbschriftliche Notation)

Der Vorteil von Aufgabenstellungen, bei denen keine Zehner- oder Hunderterübergänge stattfinden ist, dass sie vergleichsweise leicht zu lösen sind, wenn man das Stellenwertsystem verstanden hat.

Die Kursleitung gibt den Teilnehmer*innen folgende Beispielaufgaben:

BEISPIELE

273 + 6   454 + 35   561 + 338

und fragt die Teilnehmer*innen, wie sie diese Aufgaben lösen würden. Die Kursleitung oder die Teilnehmer*innen notieren die Lösungswege an der Tafel. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. Mehrsystemblöcke, offener Zahlenstrahl, Stellenwerttabelle oder andere sind ausdrücklich erwünscht und werden anhand dieser einfachen Aufgabe noch einmal systematisch versammelt, um dann für die weiteren Rechnungen zur Verfügung zu stehen.

Die Mathekonferenz kann entweder so stattfinden, dass die verschiedenen Wege sofort miteinander in Beziehung gesetzt werden oder so, dass die Teilnehmer*innen zunächst Rechenwege vorstellen und dass diese erst dann vergleichend diskutiert werden:

Welchen Weg und welche Darstellung finden Sie besser? Können Sie das begründen? Wie finden die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen? Begründen Sie.

Warum ist dieser Weg hier eigentlich der gleiche wie der Weg dort?

Ziel hierbei ist es, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen. Es soll deutlich werden, wie eine Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten, falls sie noch nicht genannt wurden:

Für die Aufgabe 273 + 6:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
2	7	3
2	7	9

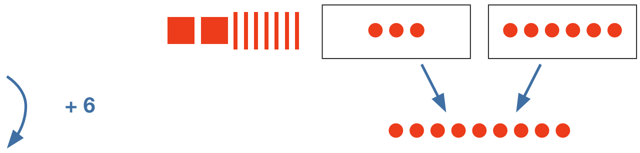


Abbildung 11.6-1 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

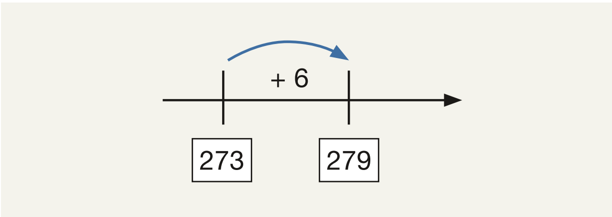


Abbildung 11.6-2 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 am offenen Zahlenstrahl

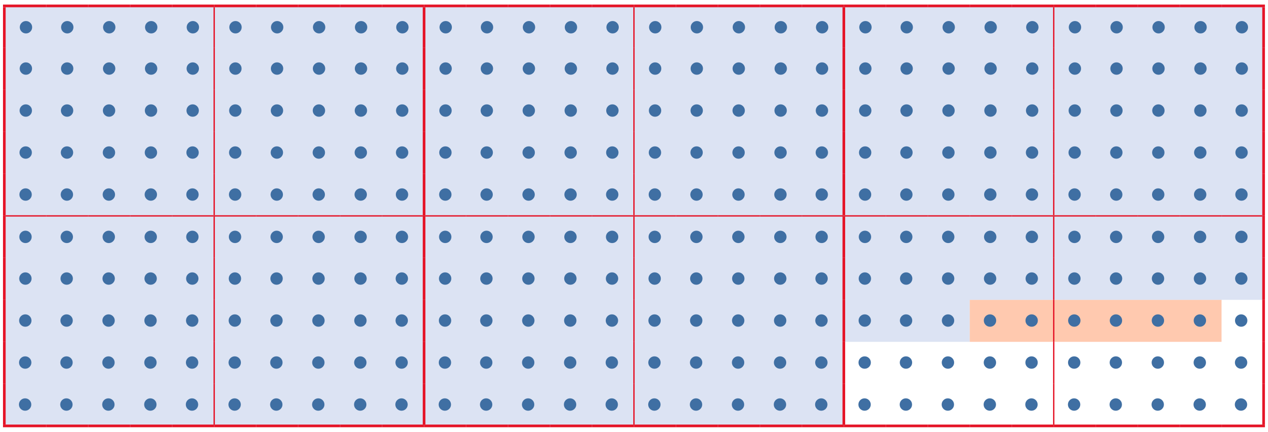


Abbildung 11.6-3 Darstellung der Aufgabe 273 + 6 im Tausenderfeld (Ausschnitt)

Halbschriftlich (gestütztes) Kopfrechnen[11]

Hier wird für die halbschriftliche Notation folgende gewählt:

273	+	6		
273	+	6	=	279

Über dem Strich steht die Aufgabe, dann folgt die schrittweise oder stellenweise Rechnung, im Beispiel nur ein Schritt bzw. nur eine Stelle.

Für die Aufgabe 454 + 35:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

H	Z	E
4	5	4
4	8	9

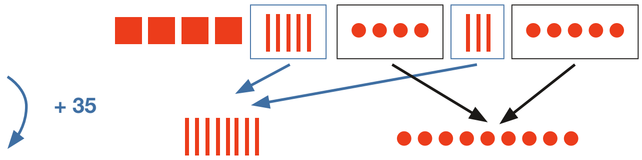


Abbildung 11.6-4 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Hier gibt es zwei Varianten: man addiert zum ersten Summanden den zweiten Summanden schrittweise und zwar entweder

- zuerst die Zehner, dann die Einer oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner:

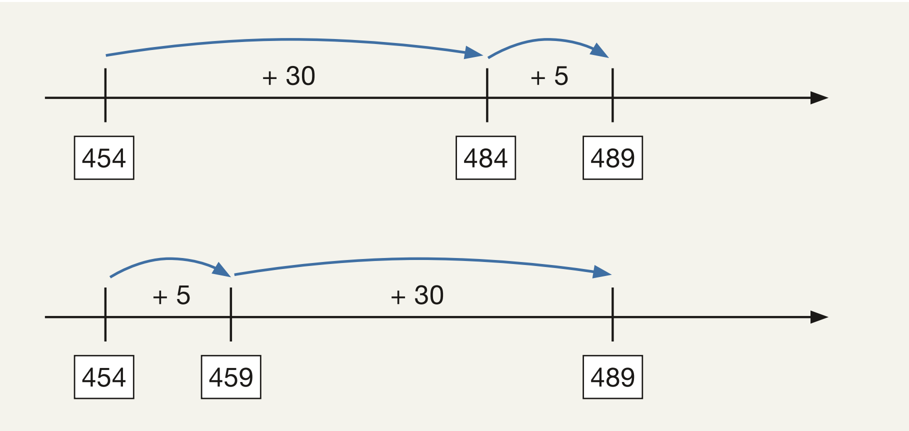


Abbildung 11.6-5 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 am Rechenstrich

Halbschriftlich (schrittweise)

Hier werden die beiden Varianten bzgl. der Reihenfolge der Stellen wie beim offenen Zahlenstrahl betrachtet[12]:

454	+	35		
454	+	30	=	484
484	+	5	=	489

454	+	35		
454	+	5	=	459
459	+	30	=	489

Abbildung 11.6-6 Darstellung der Aufgabe 454 + 35 halbschriftlich

Zusammenfassend sind für die Addition einer zweistelligen zu einer dreistelligen Zahl geeignete Darstellungsmethoden:

- Stellenwerttabelle
- Mehrsystemblöcke
- offener Zahlenstrahl
- halbschriftlich

Für die Aufgabe 561 + 338:

Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke

Diese beiden Darstellungsmethoden bieten sich für die Visualisierung der Rechenstrategie „Stellenwerte extra“ an. Bei dieser Strategie werden Hunderter zu Hundertern, Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern addiert. Dies kann auch in anderer Reihenfolge erfolgen. Im Unterschied zur Strategie „Schrittweise“ werden hier beide Summanden in ihre Stellenwerte zerlegt und nicht nur der zweite Summand.

H	Z	E
5	6	1
8	9	9

+ 338

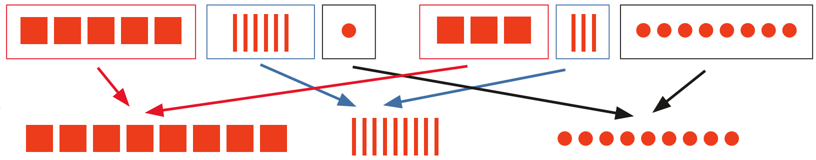


Abbildung 11.6-7 Darstellung der Aufgabe 561 + 338 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken, gelöst mit der Strategie „Stellenwerte extra“

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Im Gegensatz zu den vorigen Darstellungsmethoden wird hier der erste Summand nicht in Stellenwerte zerlegt. Der zweite Summand wird in Stellenwerte zerlegt und schrittweise zum ersten Summanden addiert.

Hier gibt es vier Varianten: Man addiert

- zuerst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer, beginnt also bei der ersten Stelle von links und geht der Reihe nach stellenweise vor, oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner und schließlich die Hunderter, beginnt also bei der ersten Stelle von rechts und geht der Reihe nach stellenweise vor, oder
- zuerst die Zehner, dann die Einer und zuletzt die Hunderter oder
- zuerst die Zehner, dann die Hunderter und zuletzt die Einer.

Die letzten beiden Varianten werden jedoch nicht empfohlen, da bei ihnen nicht stellenweise der Reihe nach von rechts nach links oder von links nach rechts vorgegangen wird und das eher verwirrend sein kann. Daher werden im weiteren Verlauf nur die ersten beiden Varianten betrachtet:

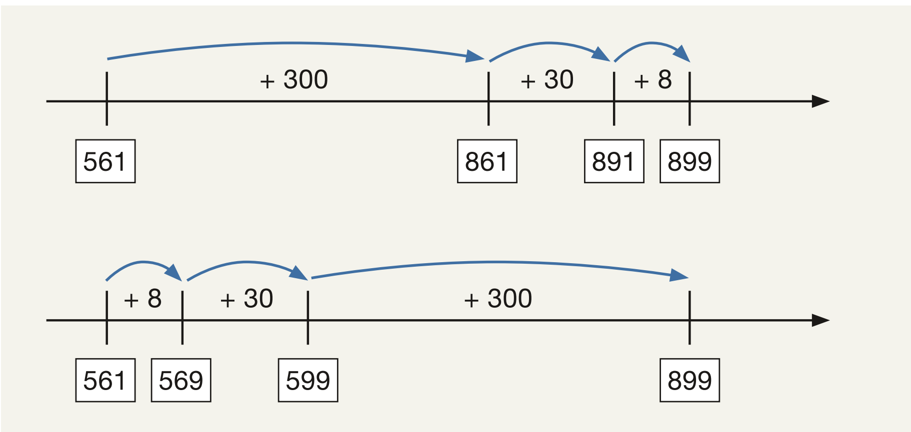


Abbildung 11.6-8 Darstellung der Aufgabe 561 + 338 am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich), gelöst mit der Strategie „schrittweise“

Halbschriftlich (schrittweise)
Auch hier werden die beiden Varianten betrachtet:

561 + 338	561 + 338
561 + 300 = 861	561 + 8 = 569
861 + 30 = 891	569 + 30 = 599
891 + 8 = 899	599 + 300 = 899

Der Weg ist vergleichbar mit der Addition einer zweistelligen zu einer dreistelligen Zahl.

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Die Grundidee ist bei der Addition ohne Zehner- oder Hunderterübergang stets dieselbe: Man schaut einzeln auf die Stellenwerte. Rechnen ist einfach, sofern das Rechnen im Zahlenraum bis 10 automatisiert ist. Wenn die Summe auf dem Stellenwert unter 10 bleibt, dann kann man die Summe direkt hinschreiben. Es bieten sich vorrangig zwei Lösungsstrategien an: „Stellenwerte extra" (H + H, Z + Z, E + E) addieren oder „schrittweise" (HZE + H + Z + E bzw. HZE + E + Z + H) addieren.

Die erarbeiteten Darstellungsmethoden sollen dabei unterstützen, Ergebnisse zu ermitteln. Sie eignen sich aber auch dazu, Rechenstrategien im Nachhinein deutlich zu machen bzw. zu kommunizieren.

11.6.2 Gruppenarbeit – Addition dreistelliger Zahlen ohne Zehner-/Hunderter-Übergang

Didaktische Ziele
- halbschriftliche Addition dreistelliger Zahlen ohne Stellenüberschreitung üben/festigen
- Darstellungsmethoden wählen, die beim Rechnen oder beim Verbalisieren des Lösungswegs unterstützen können

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen in Einzelarbeit, sich jeweils drei Additions-Aufgaben auszudenken, in denen weder ein Hunderter- noch ein Zehnerübergang stattfinden. Dann werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben, damit sich alle Teilnehmer*innen die Aufgaben der anderen Teilnehmer*innen notieren können. In der Stunde werden noch Lösungswege und Darstellungsmethoden für zwei bis drei weitere Aufgaben miteinander besprochen und die Teilnehmer*innen bzgl. Unsicherheiten oder Schwierigkeiten befragt. Diese werden in der Stunde geklärt, damit die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben als Übungen zu Hause machen können. Ziel dabei ist, dass die Teilnehmer*innen ihre Lösungswege auch darstellen bzw. verbalisieren können.

11.6.3 Mathekonferenz – Subtraktion von dreistelligen Zahlen ohne Zehner-/Hunderter-Übergänge

Didaktische Ziele
- Rechenstrategien für Subtraktionen ohne Stellenüberschreitungen erkunden („Stellenwerte extra" oder „Schrittweise")
- verschiedene Varianten zum Darstellen von Rechenstrategien der Aufgabe entsprechend nutzen (Systemmaterial, Stellenraster, Rechenstrich, halbschriftliche Notation)

Die Kursleitung gibt folgende Beispielaufgaben:

BEISPIELE
875 – 3   642 – 21   698 – 275

und fragt, wie die Teilnehmer*innen diese Aufgaben lösen würden. Die Lösungswege werden an der Tafel notiert. Verschiedene Darstellungsvarianten wie z. B. mit Mehrsystemblöcken, am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich), in der Stellenwerttabelle oder andere sind ausdrücklich erwünscht.

Nach ca. 5–10 Minuten [13] werden die Ergebnisse betrachtet und mögliche verschiedene Rechenwege verglichen:

Welchen Weg und welche Darstellung bevorzugen Sie? Können Sie das begründen? Wie bewerten die anderen die verschiedenen Wege und Darstellungen?

Inwiefern steckt hinter diesem Weg hier im Grunde der gleiche Gedanke wie hinter jenem Weg dort?

Ziel hierbei ist es, die verschiedenen Sichtweisen und Argumente für die eine oder andere Darstellung und den einen oder anderen Lösungsweg auszutauschen. Es gilt zu verdeutlichen, wie die Nutzung der stellenwertbezogenen Zahlzerlegungen das Rechnen effektiver macht.

Die Kursleitung zeigt, falls sie noch nicht genannt wurden, die nachfolgenden Lösungswege und Darstellungsmöglichkeiten für die Aufgabe 875 – 3 mit Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcken.

HINWEIS AN DIE KURSLEITUNG

Graphiken zu Mengenhandlungen sind selten selbsterklärend. Insbesondere die Subtraktion lässt sich graphisch nur schwer darstellen, da der Subtrahend keine eigene Menge darstellt, sondern eine Teilmenge des Minuenden ist. Daher ist eine wiederholte Erläuterung notwendig, dass mit der hier vorgeschlagenen Abbildung eine wegnehmende Handlung gemeint ist. Denkbar wäre zum Beispiel auch ein „Wegnehmen" der umkreisten Menge mit Hilfe eines Pfeiles.

H	Z	E
8	7	5
8	7	2

– 3

Abbildung 11.6-9 Darstellung der Aufgabe 875 – 3 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich):

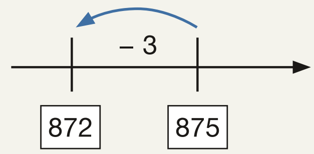
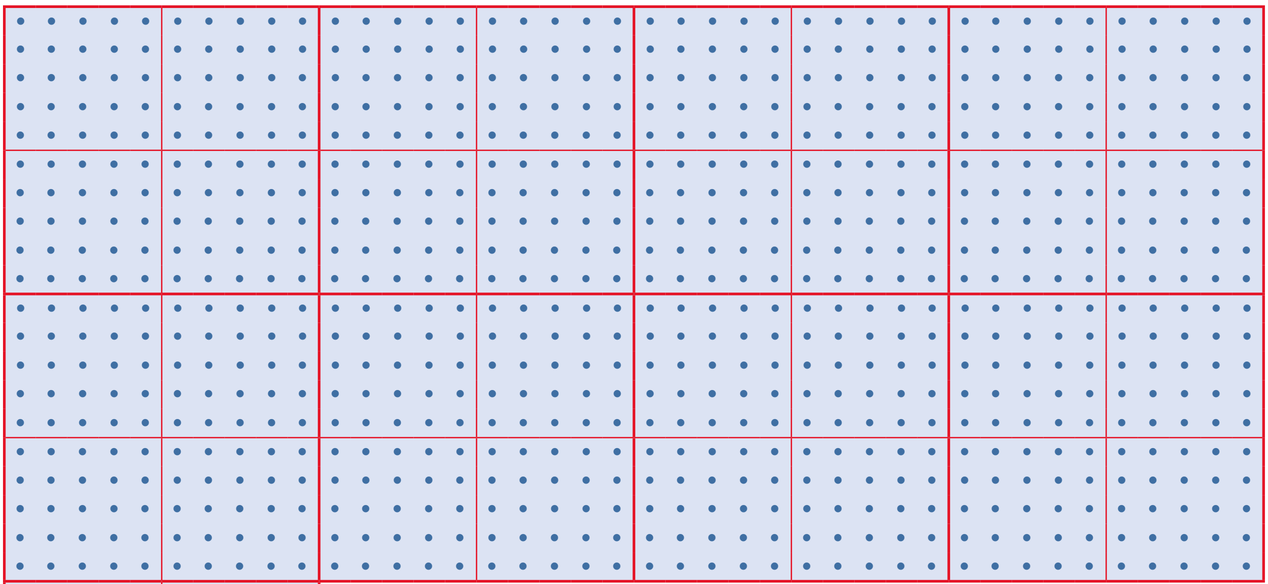
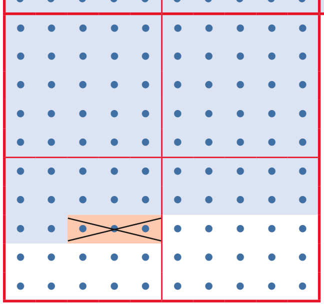


Abbildung 11.6-10 Darstellung der Aufgabe 875 – 3 am offenen Zahlenstrahl

Halbschriftlich:

875 – 3

875 – 3 = 872

Abbildung 11.6-11 Darstellung der Aufgabe 875-3 am Tausenderfeld (Ausschnitt)

Die verschiedenen Visualisierungsmöglichkeiten bzw. Notationsformen sind unterschiedlich gut geeignet für die Beispielaufgabe:

- **Stellenwerttabelle**
  Die Stellenwerttabelle kommt der schriftlichen Subtraktion sehr nahe und eignet sich weniger zur Darstellung einer Wegnehmhandlung als zur Bebilderung des Ermittelns eines Unterschieds zwischen zwei vorhandenen Zahlen.
- **Mehrsystemblöcke**
  Die Mehrsystemblöcke sind später bei Aufgaben mit Stellenunterschreitungen sehr hilfreich für die Darstellung der Schritte der Entbündelung. Hier wird nicht entbündelt, daher muss man hier nur die losen Einer zählen.
- **Leerer Zahlenstrahl (Rechenstrich)**
  Ist hier nicht hilfreich, da nur ein Rechenschritt stattfindet, später aber brauchbar zur Verdeutlichung von mehreren Rechenschritten.
- **Halbschriftliche Notation**
  Für die Subtraktion einer einstelligen Zahl von einer dreistelligen stellt das keine Erleichterung dar, da ohnedies nur ein Rechenschritt erforderlich ist.

Zusammenfassend kristallisieren sich die Darstellungen für die Subtraktion einer mehrstelligen von einer dreistelligen Zahl in der Stellenwerttabelle und halbschriftlich als die geeignetsten Varianten heraus. Die Darstellungen im Tausenderfeld erweist sich eher als nicht vorteilhaft und wird nachfolgend außer Acht gelassen.

Für die Aufgabe 642 – 21:
Darstellung der Strategie „Stellenwerte extra“ in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken:

H	Z	E
6	4	2
6	2	1

– 21

Abbildung 11.6-12 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken, gelöst mit der Strategie „Stellenwerte extra“

In diesem Fall werden beide Zahlen, sowohl Minuend als auch Subtrahend in ihre Stellenwerte zerlegt. Dann werden Zehner von Zehnern weggenommen und Einer von Einern. Auch die umgekehrte Reihenfolge ist möglich.

Am offenen Zahlenstrahl
Hier gibt es zwei Varianten: Man subtrahiert vom Minuenden, der nicht in Stellenwerte zerlegt wird, schritttweise entweder

- erst die Zehner, dann die Einer oder
- erst die Einer, dann die Zehner:

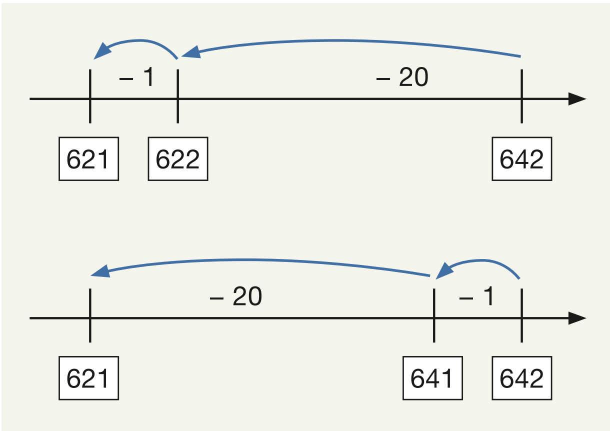


Abbildung 11.6-13 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 am leeren Zahlenstrahl, gelöst mit der Strategie „Schrittweise“

Halbschriftliche Notation der Rechenstrategie „Schrittweise“[14]

642	–	21		
642	–	20	=	622
622	–	1	=	621

642	–	21		
642	–	1	=	641
641	–	20	=	621

Abbildung 11.6-14 Darstellung der Aufgabe 642 – 21 halbschriftlich notiert, gelöst mit der Strategie „Schrittweise“

Für die Aufgabe 698 – 275:

Darstellung der Strategie „Stellenwerte extra“ in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

H	Z	E
6	9	8
4	2	3

– 275

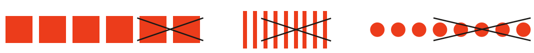


Abbildung 11.6-15 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 in der Stellenwerttabelle und mit Mehrsystemblöcken

Am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Hier werden folgende Varianten betrachtet: man subtrahiert vom Minuenden, der Ausgangszahl, schrittweise entweder

- zuerst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer, oder
- zuerst die Einer, dann die Zehner und schließlich die Hunderter, geht also der Reihe nach stellenweise vor.

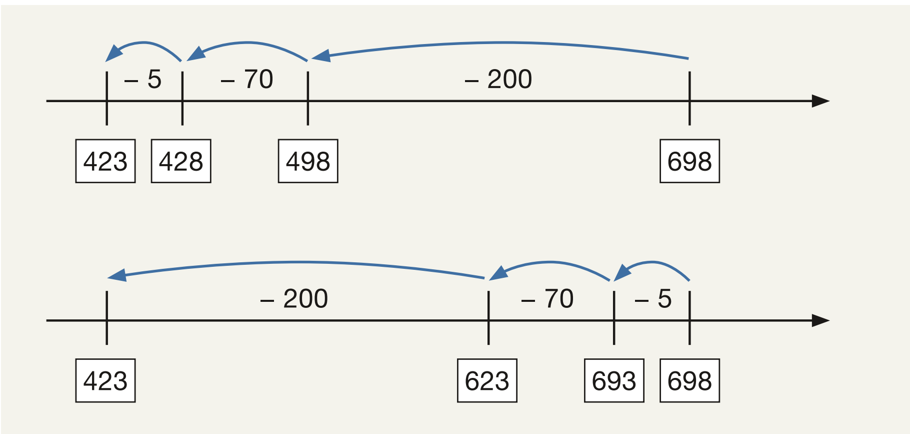


Abbildung 11.6-16 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 am leeren Zahlenstrahl (Rechenstrich)

Halbschriftliche Notation der Rechenstrategie „Schrittweise“[15]

Auch hier werden die beiden Varianten bzgl. der Reihenfolge der Stellen von links oder rechts betrachtet

698	–	275		
698	–	200	=	498
498	–	70	=	428
428	–	5	=	423

698	–	275		
698	–	5	=	693
693	–	70	=	623
623	–	200	=	423

Abbildung 11.6-17 Darstellung der Aufgabe 698 – 275 halbschriftlich

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Die Grundidee ist bei der Subtraktion ohne Zehner- oder Hunderterübergang stets dieselbe wie bei der Addition ohne Zehner- oder Hunderterübergang.

Man schaut einzeln auf die Stellenwerte. Rechnen ist einfach. Wenn die Differenz auf dem Stellenwert 0 oder größer bleibt, lässt sich die Differenz direkt bestimmen.

11.6.4 Gruppenarbeit – Subtraktion von dreistelligen Zahlen ohne Zehner/Hunderterübergang

Didaktische Ziele

- halbschriftliche Subtraktion dreistelliger Zahlen ohne Stellenüberschreitung üben/festigen
- Darstellungsmethoden wählen, die beim Rechnen selbst oder beim Verbalisieren des Lösungswegs unterstützen können

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen in Einzelarbeit, sich jeweils drei Subtraktions-Aufgaben auszudenken, in denen weder ein Hunderter- noch ein Zehnerübergang stattfindet. Dann werden die Aufgaben an die Tafel geschrieben, damit sich alle Teilnehmer*innen die Aufgaben der anderen Teilnehmer*innen notieren können. In der Stunde werden noch zwei bis drei weitere Aufgaben miteinander besprochen und die Teilnehmer*innen bzgl. Unsicherheiten oder Schwierigkeiten befragt. Diese werden in der Stunde geklärt, damit die Teilnehmer*innen die übrigen Aufgaben als Übungen zu Hause machen können.

RÜCKSCHAU

Die Addition zu und Subtraktion von dreistelligen Zahlen ist für Aufgaben ohne Zehner- und Hunderterübergänge leicht zu lösen. Das wurde mit verschiedenen Beispiel-Aufgaben von den Teilnehmer*innen wiederholt und routinisiert. Dabei wurden verschiedene hilfreiche Formen der Visualisierung bzw. der Notation verwendet, und zwar Stellenwerttabelle, Mehrsystemblöcke, offener Zahlenstrahl und halbschriftliches Rechnen.

Die Nutzung des Tausenderfeldes hat sich für das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen grundsätzlich als wenig hilfreich erwiesen, da es eher zum Zählen verleitet. Allerdings ist es in manchen Aufgaben möglich, dass die Teilnehmer*innen dieses Mittel doch subjektiv als geeigneter einschätzen.