



11.2 Konstruktion des Dezimalsystems, Stellenwertumwandlungen

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen vertiefen die Inhalte aus Kapitel 11.1 und ihr Verständnis der Bündelungssystematik im Zahlbereich bis 1.000. Dort haben sie den Aufbau und die Strukturen der Zahlen bis 1.000 mittels Darstellungen wie Stellenwerttabelle, Mehrsystemblöcken, Tausenderbuch und Tausenderfeld sowie Zahlenstrahl betrachtet. Des Weiteren haben die Teilnehmer*innen Nachbarzehner und -hunderter für Beispielzahlen ermittelt.

Eine wesentliche Erkenntnis für die Zahlen bis 1.000 ist, dass die einzelnen Hunderter immer gleich aufgebaut sind, also 101, 102, 103, ..., 199 und 201, 202, 203, ..., 299 usw.

Nach einer theoretischen Vermittlung zur Konstruktion des Dezimalsystems vertiefen die Teilnehmer*innen in praktischen Übungen die wesentlichen Aspekte der Bündelung und Entbündelung verschiedener Stellenwerte. Dabei werden unterschiedlich vorteilhafte Darstellungsweisen dreistelliger Zahlen verwendet, um die praktischen Vorteile der Bündelungssystematik beim Erfassen großer Mengen im Dezimalsystem hervorzuheben.

11.2.1 Kursgespräch – Zahlen in verschiedenen Stellenwerten darstellen

Didaktisches Ziel

auf Grundlage des fortschreitenden Bündelns werden Zahlen in verschiedenen Stellenwerten dargestellt, z. B. 1 T = 10 H = 100 Z = 1.000 E

Im Zahlbereich bis 100 haben die Teilnehmer*innen die Bündelung von 10 Einern zu einem Zehner und von 10 Zehnern zu einem Hunderter kennengelernt. Die nächsthöhere Bündelungsstufe wird immer dann erreicht, wenn genau 10 Bündel der vorangegangenen Stufe vorhanden sind:

$$10 \text{ E} = 1 \text{ Z} \quad 10 \text{ Z} = 1 \text{ H}$$

In der Stellenwerttabelle stellt sich die Bündelung wie in Abbildung 11.2-1 dar. Diese lässt sich im Dezimalsystem beliebig fortsetzen, indem immer 10 Einheiten einer Stufe zu einem neuen Bündel der nächsthöheren Bündelungsstufe zusammengefasst werden:

Milliarden			Millionen			Tausend													
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E								
											10								
										1	0								
											10	0							
									1	0	0	0							
											10	0	0						
									1	0	0	0	0						
												10	0	0	0				
									1	0	0	0	0	0	0				
													10	0	0	0	0		
														1	0	0	0	0	
																			usw.

Abbildung 11.2-1 Stellenwerttabelle – immer Zehn werden gebündelt

Hinter der Bündelung steht ein theoretisches Konstrukt, um das Erfassen großer Mengen zu vereinfachen. Ein Tausender, also 1.000, kann auf vielfältige andere Art und Weise gedacht und dargestellt werden:

- als 1.000 Einer
- als 100 Zehner
- als 10 Hunderter
- als 1 Tausender
- als 560 Einer und 44 Zehner
- als 8 Hunderter, 8 Zehner und 120 Einer
- als 9 Hunderter, 3 Zehner und 70 Einer...

um nur einige Beispiele zu nennen, die in der folgenden Stellenwerttabelle dargestellt sind.

11.2.2 Kursgespräch – Kanonische und nicht-kanonische Zahlzerlegungen

Didaktische Ziele

- stellenweises Zerlegen von Zahlen festigen
- andere mögliche Zahlzerlegungen erkunden (nicht kanonische Zahl Darstellungen werden unter 11.3 noch ausführlich behandelt)

Zum besseren Verständnis wird nachfolgend zwischen der *kanonischen* und der *nicht-kanonischen* Darstellung von Zahlen unterschieden. Der Blick auf diese Unterscheidung hat zum Ziel, bei den Teilnehmer*innen das Verständnis für die verschiedenen Möglichkeiten der Zahlzerlegungen sowie für die Vorteilhaftigkeit der maximalen Bündelung zu verbessern. Kanonisch dargestellte Zahlen lassen den Wert einer Zahl leicht erkennen.

Die Zahl 358 lässt sich neben der stellenweisen Zerlegung (3 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer) in die Teile

- 35 Zehner und 8 Einer, also in 350 und 8 oder in
- 3 Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer, also in 300 und 50 und 8 oder in
- 3 Hunderter, 4 Zehner und 18 Einer, also in 300 und 40 und 18 oder in
- 2 Hunderter, 12 Zehner, 38 Einer usw.

zerlegen.

Die Darstellungen der Zahlzerlegungen und in der Stellenwerttabelle würden dann wie folgt aussehen:

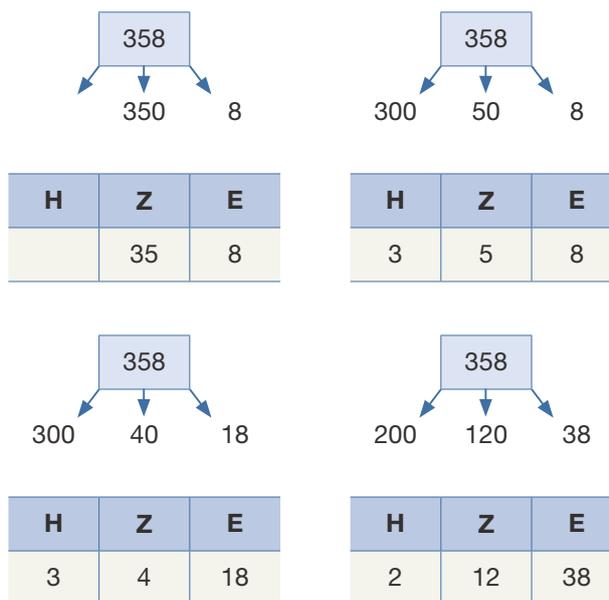


Abbildung 11.2-3 Zahlzerlegungen und Stellenwerttabelle für die Zahl 358

Das Zerlegen dreistelliger Zahlen wird ausführlicher in Kapitel 11.3 betrachtet.

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Im Dezimalsystem werden alle Werte auf die Grundzahl 10 bezogen. Es gibt zehn verschiedene Ziffern: 0, 1, 2, ..., 9 und mit diesen lassen sich alle Zahlen darstellen. Je nachdem, an welcher Stelle eine Ziffer in einer mehrstelligen Zahl steht, variiert der Wert dieser Ziffer. Die Stellenwerttabelle für die Zahl 1235 sieht dann wie folgt aus:

...	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle
...	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	2	3	5

11.2.3 Kursgespräch – Zahldarstellungen im Stellenwertsystem

Didaktisches Ziel

stellenweises Zerlegen von Zahlen mit verschiedenem Material darstellen (Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke)

Sie haben jetzt (wieder einmal) gesehen, dass jede Zahl aus anderen Zahlen besteht. Diese Zerlegungen können unterschiedlich sein. Sie haben in Kapitel 9 bereits gelernt, dass unsere Schreibweise von Zahlen genau eine dieser möglichen Zerlegungen zeigt. Nämlich die Zerlegung in Zehnerbündel. Diese Idee brauchen wir nun für den Zahlbereich bis 1000. Wir schauen uns das zunächst am Beispiel der Zahl 128 an.

Für die Zahl 128 sieht die eindeutige Darstellung mittels Mehrsystemblöcken und in der Stellenwerttabelle wie folgt aus:

H	Z	E

Abbildung 11.2-4 Darstellung 128 mit Mehrsystemmaterial

oder

H	Z	E
1	2	8

Die Eins an erster Stelle von links gibt die Anzahl der Hunderter an, die zwei an der zweiten Stelle von links steht für die Anzahl der Zehner, und die dritte Stelle von links lässt erkennen, dass in der oberen Darstellung acht Einer ungebündelt vorliegen.

Daraus ergibt sich die offensichtliche Additionsaufgabe:

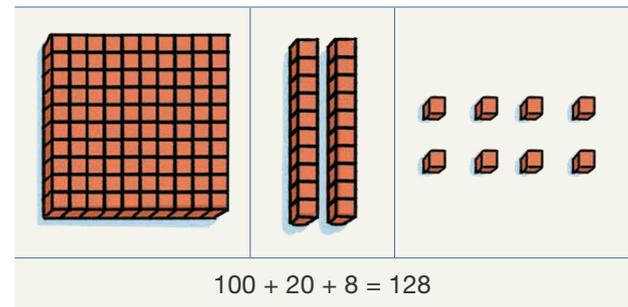


Abbildung 11.2-5 Darstellung von 128 mit Mehrsystemblöcken

11.2.4 Mathekonferenz – Stellenwerte umwandeln

Didaktisches Ziel

kanonische und nicht-kanonische Zahlzerlegungen mit unterschiedlichen Darstellungsvarianten festigen/vertiefen (als Zahlwort, als Zahl in Ziffernschreibweise, als Addition der Stellenwerte, mit Mehrsystemblöcken oder in der Stellenwerttabelle)

Die Teilnehmer*innen haben den Aufbau der Zahlen bis 1.000 und des Stellenwertsystems vermittelt bekommen. Nun sollen die Teilnehmer*innen ihr Wissen praktisch vertiefen und mittels Übungen den Umgang mit verschiedenen Darstellungen der Zahlen bis 1.000 sowie mit der Bündelung routinisieren.

Die Übungen sind in zwei Varianten mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad unterteilt. In der ersten Variante erfolgen die Darstellungen mit kanonischer Bündelung. Wenn die Kursleitung den Eindruck hat, dass die Teilnehmer*innen damit sicher umgehen können, können die Übungen der zweiten Variante durchgeführt werden. Hier sind die Bündelungen keineswegs kanonisch, sodass ein weiterer Lernaspekt entsteht: Die Teilnehmer*innen sollen selbst so weit bündeln, dass sie schließlich in der Stellenwertdarstellung die Zahlen leicht erkennen.

Alternativ kann mit der zweiten Variante begonnen und ggf. bei auftretenden Schwierigkeiten die erste Variante vorgezogen werden.

1. VARIANTE: KANONISCHE BÜNDELUNG

Die Kursleitung befestigt an der Tafel nachfolgende Darstellungen dreistelliger Zahlen (jeweils als einzelne Karten, die an der Tafel befestigt und verschoben werden können, z. B. mit Magneten oder Nadeln an der Stellwand; siehe Material und Kopiervorlage) als Darstellung mittels Zahlwort, Mehrsystemblöcken, Zahl, Addition und als Zerlegung in der Stellenwerttabelle:

dreihundert- achtundsiebzig	fünfhundert- neununddreißig	siebenhundert- sechsunneunzig	achthundert- vierundzwanzig	vierhundert- sechsunfünfzig																														
796	824	539	456	378																														
$500 + 30 + 9$	$400 + 50 + 6$	$300 + 70 + 8$	$700 + 90 + 6$	$800 + 20 + 4$																														
<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr></table>	H	Z	E	4	5	6	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>7</td><td>9</td><td>6</td></tr></table>	H	Z	E	7	9	6	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	H	Z	E	3	7	8	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>8</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>	H	Z	E	8	2	4	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>9</td></tr></table>	H	Z	E	5	3	9
H	Z	E																																
4	5	6																																
H	Z	E																																
7	9	6																																
H	Z	E																																
3	7	8																																
H	Z	E																																
8	2	4																																
H	Z	E																																
5	3	9																																

Abbildung 11.2-6 Tafelbilder Stellenwertumwandlung mit kanonischer Bündelung (1. Variante)

Die Teilnehmer*innen sollen gemeinsam die richtigen Zuordnungen finden und die entsprechenden Karten jeweils untereinander spaltenweise an der Tafel anordnen.

Anschließend bietet es sich an, dass die Teilnehmer*innen die an der Tafel befindlichen Zahlen der Größe nach ordnen. Beginnend mit der kleinsten Zahl ist hier das Zeichen „<“ zu verwenden, beginnend mit der größten Zahl entsprechend das Zeichen „>“. Die Teilnehmer*innen notieren beide Varianten.

Nun verorten die Teilnehmer*innen die Zahlen am Zahlenstrahl und nennen schließlich die jeweiligen Nachbarzehner sowie -hunderter. Die Teilnehmer*innen sollen ihre Vorgehensweisen einander vermitteln und miteinander in Diskussion und Austausch treten, welcher der geschickteste Weg ist und wie man auf den einzelnen Darstellungsebenen erkennt, welche Zahl kleiner und welche größer ist.

Die Kursleitung präsentiert schließlich die Lösungen, falls erforderlich:

Ordnung der Größe nach, die kleinste Zahl zuerst: $378 < 456 < 539 < 796 < 824$

wiederholend

Ordnung der Größe nach, die kleinste Zahl zuerst: $824 > 796 > 539 > 456 > 378$

Nachbarzehner

von 378: 370 und 380
 von 456: 450 und 460
 von 539: 530 und 540
 von 796: 790 und 800
 von 824: 820 und 830

Nachbarhunderter

von 378: 300 und 400
 von 456: 400 und 500
 von 539: 500 und 600
 von 796: 700 und 800
 von 824: 800 und 900

2. VARIANTE: NICHT-KANONISCHE BÜNDELUNG

Die Kursleitung befestigt an der Tafel nachfolgende Darstellungen dreistelliger Zahlen (jeweils als einzelne Karten, die an der Tafel befestigt und verschoben werden können, z. B. mit Magnet oder Nadeln an der Stellwand; siehe Material und Kopiervorlage), als Darstellung mittels Zahlwort, Mehrsystemblöcken, Zahl, Addition und als Zerlegung in der Stellenwerttabelle:

dreihundert- achtundsiebzig	fünfhundert- neununddreißig	siebenhundert- sechsunneunzig	achthundert- vierundzwanzig	vierhundert- sechsunfünfzig																														
796	824	539	456	378																														
$400 + 120 + 19$	$300 + 150 + 6$	$200 + 150 + 28$	$600 + 180 + 16$	$700 + 110 + 14$																														
<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>0</td><td>32</td><td>136</td></tr></table>	H	Z	E	0	32	136	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>5</td><td>27</td><td>26</td></tr></table>	H	Z	E	5	27	26	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>3</td><td>20</td><td>324</td></tr></table>	H	Z	E	3	20	324	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>178</td></tr></table>	H	Z	E	2	0	178	<table border="1"><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td>4</td><td>12</td><td>19</td></tr></table>	H	Z	E	4	12	19
H	Z	E																																
0	32	136																																
H	Z	E																																
5	27	26																																
H	Z	E																																
3	20	324																																
H	Z	E																																
2	0	178																																
H	Z	E																																
4	12	19																																

Abbildung 11.2-7 Tafelbilder Stellenwertumwandlung mit nicht-kanonischer Bündelung, 2. Variante

Die Teilnehmer*innen sollen gemeinsam die richtigen Zuordnungen finden und die entsprechenden Karten jeweils untereinander spaltenweise an der Tafel anordnen.

Nicht-kanonisch gebündelt:

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	Z	H	Z	E	H	Z	Z
	32	136	5	27	26	3	20	26	2		178		43	109

Kanonisch gebündelt:

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	Z	H	Z	Z	H	Z	Z
4	5	6	7	9	6	8	2	4	3	7	8	5	3	9

Betrachtet man für obige Zahlen die Zahlzerlegungen gemäß der nicht-kanonische Bündelung im Vergleich zur kanonischen Bündelung, ergibt sich folgendes Bild:

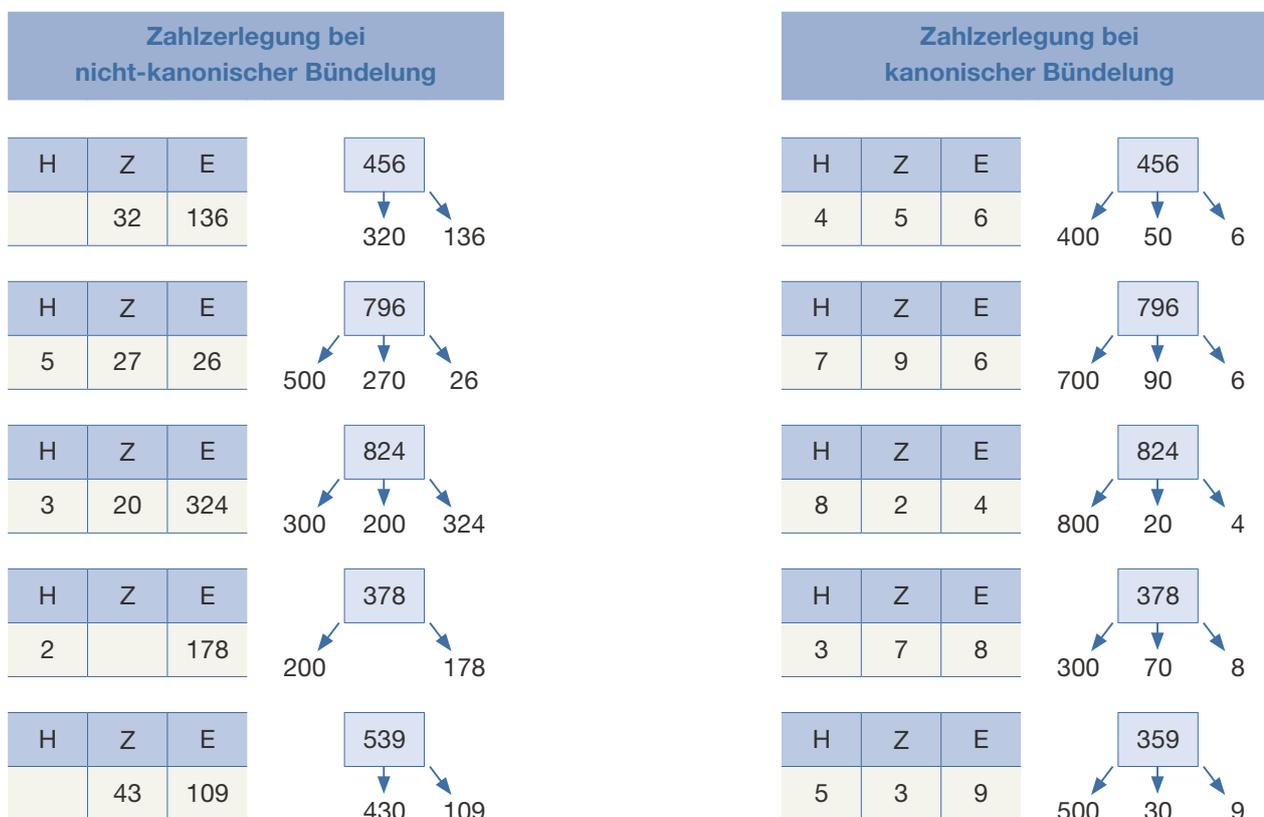


Abbildung 11.2-8 Zahlzerlegungen dreistelliger Zahlen – Nicht-kanonische Bündelung (links) im Vergleich zur kanonischen Bündelung (rechts)

11.2.5 Kursgespräch und Einzelarbeit – Stellenwerte umwandeln, Zahlwörter schreiben

Didaktische Ziele

- nicht-kanonische Zahldarstellungen in kanonische Zahldarstellungen umwandeln und als Zahl schreiben
- Zahlen als Zahlwort schreiben
- erkunden, in welchen Aufgabentypen Entbündelungen erforderlich sind

Die Kursleitung händigt den Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 11.2 a** aus. Ziel ist es, die Umwandlung von Stellenwerten und das Verständnis der Bündelung zu vertiefen. Ferner sollen das Entbündeln und das Verständnis der unterschiedlichen Zahldarstellungen routinisiert werden. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 20–30 Minuten.

Die Kursleitung erläutert die Vorgehensweise:

AUFGABENBLATT 11.2 a

Wandeln Sie in andere Stellenwerte um. Schreiben Sie das Ergebnis als Zahl. Ordnen Sie nach dem Wert der Stellen, also H Z E.

Beispiele:

$$18 E + 21 E + 10 Z = \underline{1 Z} \underline{8 E} + \underline{2 Z} \underline{1 E} + \underline{1 H} = \underline{1 H} \underline{3 Z} \underline{9 E}, \text{Zahl: } 139$$

$$12 Z + 23 E + 71 Z = \underline{\hspace{10em}}$$

$$22 Z + 2 H + 98 E = \underline{\hspace{10em}}$$

$$44 E + 36 Z = \underline{\hspace{10em}}$$

$$135 E + 2 H + 31 Z = \underline{\hspace{10em}}$$

18 Einer enthalten 10 Einer und 8 Einer, die 10 Einer werden zu einem Zehner gebündelt, sodass aus 18 Einern dann 1 Zehner und 8 Einer werden. Analog werden aus 21 Einern dann 2 Zehner und 1 Einer und aus den 10 Zehnern ein Hunderter.

Hier bietet sich an, die Teilnehmer*innen mit Fragen zum Diskutieren anzuregen, etwa:

Warum rechnet man nicht $18 E + 21 E = 39 E$ und bündelt dann aus den 39 E die 3 Zehner mit einem Rest von 9 E?

Antwort: Ist möglich, aber der Rechenaufwand ist höher.

Was ist aus Ihrer Sicht einfacher? $18 E + 21 E$ oder $1 Z 8 E + 2 Z 1 E$? Warum?

Kann man hier auch die Stellen vertauschen, z. B. $1 Z 8 E + 2 Z 1 E = 1 Z + 2 Z + 8 E + 1 E$?

Wenn nein: Warum nicht? Wie sehen das die anderen?

Wenn ja: Warum geht das? Können Sie das erklären?

Hier weist die Kursleitung auf die Möglichkeit der Vertauschung der Summanden in Summen hin (siehe Kapitel 7 *Teile, Ganzes und Gleichungen*) und darauf, dass das Addieren von $1 + 2$ (die Zehner) und $8 + 1$ (die Einer) leichter ist als die Addition von 18 und 21 (Einern). Zudem empfiehlt sich hier die Thematisierung der Konvention, dass $1 Z 8 E$ dasselbe bedeutet wie $1 Z + 8 E$.

Die Kursleitung bespricht dann mit der Gruppe die zweite Aufgabe. Die Teilnehmer*innen sollen im Anschluss daran die weiteren Aufgaben alleine lösen. Wenn die Mehrheit der Teilnehmer*innen Schwierigkeiten beim selbstständigen Lösen hat, bietet sich hier eine Mathekonferenz an.

Die Aufgaben 2 bis 5 lässt die Kursleitung dann die Teilnehmer*innen nach einer kurzen Erläuterung der Aufgabenstellungen in Einzelarbeit lösen. Hier werden das Schreiben von Zahlwörtern sowie die Darstellung von Zahlen in der Stellenwerttabelle und am Zahlenstrahl geübt.

Bestehen bei einigen Teilnehmer*innen noch Schwierigkeiten bei der Umwandlung nicht-kanonisch gebündelter Zahlen in die kanonische Bündelung, gibt die Kursleitung zu Aufgabe 5 ein Zahlenbeispiel. Dazu wird die folgende Stellenwerttabelle präsentiert:

H	Z	E
	32	69
1	28	9
2	8	109
3		89
		389

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen:

*Welche Zahlen sieht man hier?
Sind die Darstellungen falsch oder richtig?*

Ziel der hier entstehenden Diskussion ist es, den Teilnehmer*innen zu vermitteln, dass die Darstellungen alle richtig sind und die Zahl 389 zeigen. Allerdings wurde die Zahl in der Stellenwerttabelle jeweils nicht-kanonisch erfasst, da die Stellenwerte nicht vollständig gebündelt, sondern z. T. entbündelt dargestellt wurden. So ist z. B. in der Schreibweise mit 1 H 28 Z 9 E nicht vollständig gebündelt worden und die dargestellte Zahl sehr viel umständlicher zu ermitteln als in der wohlstrukturierten Bündelung 3 H 8 Z 9 E.

Dennoch ist die Entbündelung von entscheidender Wichtigkeit beim Rechnen mit mehrstelligen Zahlen.

Weitere Fragen dazu an die Teilnehmer*innen:

*Wann braucht man das Entbündeln?
Warum ist es hilfreich, dass man 1 H entbündeln kann in 10 Z oder 100 E oder in 9 Z und 10 E?*

Hat jemand dazu eine Idee, ein Beispiel?

Wenn die Teilnehmer*innen nicht auf die Lösung kommen, hilft die Kursleitung:

Bei der Subtraktion oder dem Wechseln von Geld kann das Wissen über die Entbündelungsmöglichkeiten mehrstelliger Zahlen/Beträge hilfreich sein, z. B. wenn es einen 100 €-Schein in kleinere Scheine (10 €-Scheine: 10 Stück) einzutauschen gilt oder wenn von 1 Hunderter genau 8 E abzuziehen sind: Dann ist es hilfreich zu wissen, dass der Hunderter zunächst in 10 Zehner und dann einer der Zehner in Einer eingetauscht werden kann, um die 8 Einer wegnehmen zu können, ohne dass die anderen 9 Zehner entbündelt werden müssen. Auch beim Halbieren einer ungeraden Anzahl von Zehnern oder Hundertern ist ein Entbündeln bzw. Tauschen in die nächstkleinere Einheit unumgänglich. Die Hälfte von z. B. 30 wird ermittelt, indem zwei Zehner ganz belassen werden und ein Zehner in 10 Einer zerlegt werden; dann können die zwei Zehner und die 10 Einer getrennt halbiert werden. Dieselbe Vorgehensweise ist beim Halbieren einer ungeraden Anzahl von Hundertern, Tausendern etc. erforderlich.

Detaillierter wird die zentrale Bedeutung der Entbündelung für die Subtraktion in Kapitel 11.7 erarbeitet.

RÜCKSCHAU

Für einen sicheren Umgang mit mehrstelligen Zahlen ist es wichtig zu wissen, was die Notation unseres Stellenwertsystems bedeutet:

Die Zahl 1235 beispielsweise gibt in dieser Notation Auskunft darüber, dass sie aus einem Tausender, 2 Hundertern, 3 Zehnern und 5 Einern besteht. Die Teilnehmer*innen haben in dieser Unterrichtseinheit gelernt, dass man 1235 auch in anderer Bündelungsweise darstellen kann wie z. B. 12 Hunderter, 2 Zehner und 15 Einer. Letztere Darstellung ist zwar nicht-kanonisch, muss aber verstanden sein, um mehrstellige Zahlen beliebig bündeln und entbündeln und damit zerlegen zu können. Der sichere Umgang mit dem Aufbau von Zahlen und dem Stellenwertsystem ist Voraussetzung für das Rechnen.

Die Bündelungsprinzipien sind folgende:

- Immer 10 werden zu einem Bündel zusammengefasst, damit entsteht ein neues Bündel auf der nächsthöheren Bündelungsstufe: 10 Einer = 1 Zehner.
- Es wird so weit wie möglich in Zehnerbündel zusammengefasst, um den Wert einer Zahl leichter zu erkennen: 20 Zehner + 38 Einer = 5 Zehner + 8 Einer → Zahl: 58.
- Auch die Hunderter, Tausender... fasst man so weit wie möglich zusammen zur nächsten Bündelungsstufe.

Zum Verständnis wurden verschiedene Zahlen anhand unterschiedlicher Darstellungsweisen wie Tausenderbuch, Tausenderfeld, Zahlenstrahl, Stellenwerttabelle und Mehrsystemblöcke betrachtet. Die (jeweils unterschiedlich gut sichtbare) Darstellung der stellenweisen Zerlegung wurde in all diesen Darstellungen betrachtet. Dies wird in Kapitel 11.3 vertieft.