
MENGEN UND ZAHLEN VERGLEICHEN

4



4 MENGEN UND ZAHLEN VERGLEICHEN

Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- Verständnis für Zahlbeziehungen („Relationaler Zahlbegriff“) erarbeiten/festigen
- Mengen in den Kategorien „gleich viel/mehr/weniger“ mittels Abzählen und Eins-zu-Eins-Zuordnung vergleichen
- Anzahlen in den Kategorien „gleich viel/mehr/weniger“ vergleichen
- Zahlbeziehungen „um 1 mehr/weniger“, „um 2 mehr/weniger“, „um x mehr/weniger“ erkunden und automatisieren
- Vergleichszeichen kennen und richtig benutzen
- Unterschiede zwischen Anzahlen ermitteln
- Unterschiede zwischen Anzahlen durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Mengen denken („Kardinaler Zahlaspekt“)
- Abzählen von Mengen unter Einhaltung der Zählprinzipien
- „Invarianz“ (Unveränderlichkeit) von Mengen
- Zahlwortreihe bis mindestens 10 vorwärts und rückwärts
- Ziffern schreiben/lesen
- Verständnis der Rechenoperationen Plus und Minus und ihrer Zusammenhänge

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Bei Vergleichen werden Situationen oder Eigenschaften zueinander in Beziehung gesetzt. Es wird dabei auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten fokussiert.

Um Mengen zu vergleichen – Mengen enthalten unterscheidbare Elemente – kann entweder zählend die Anzahl der Elemente bestimmt werden und entsprechend diese Anzahl verglichen werden oder durch Zuordnung ermittelt werden, wodurch sich die Mengen unterscheiden. Mit Zuordnung ist gemeint, dass jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird – *Eins-zu-Eins-Zuordnung*.

Bei einem *Vergleich* von Zahlen werden deren Beziehungen – *Zahlbeziehungen* – betrachtet und bestimmt, um wie viel sich die Zahlen unterscheiden oder ob sie gleich sind. Das kann durch die Zeichen $</>/=$ eindeutig ausgedrückt werden. Dabei sagen die Zeichen aus, ob eine Zahl größer ($>$) oder kleiner ($<$) oder gleich ($=$) der anderen Zahl ist. Um wie viel sich Zahlen unterscheiden, wird durch die Differenz/den Unterschied dieser Zahlen angegeben.

Zum Verständnis von Zahlen führt, diese mit ihren Beziehungen und Vergleichen zueinander zu denken:

BEISPIEL

Sechs ist weniger als acht, aber mehr als fünf. Sechs ist genau einer/um eins mehr als fünf, aber zwei weniger als acht und einer weniger als sieben ...

Eine grundlegende Zahlbeziehung ist „einer mehr/um eins mehr“ oder entsprechend „einer weniger/um eins weniger“.

Das Zahlssystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der *Seriation um eins* aufgebaut, das heißt, dass fortlaufend zu jeder Zahl ein Einer hinzukommt und dass jede Zahl um eins mehr ist als ihr Vorgänger, entsprechend um eins weniger als ihr Nachfolger.

Auch mathematische Ausdrücke (Terme) können verglichen werden, zum Beispiel $5 - 1$ und $4 + 3$. Wird von fünf eins abgezogen, bleiben vier übrig. $5 - 1$ steht für vier. Werden zu vier drei dazugegeben, sind es zusammen sieben. $4 + 3$ steht für sieben. Da vier kleiner sieben ist ($4 < 7$), muss auch $5 - 1 < 4 + 3$ sein.

Der wesensbestimmende Bestandteil einer *Gleichung* ist das *Gleichheitszeichen*. Beide Seiten einer Gleichung können vertauscht werden, ohne dass sich die mathematische Aussage ändert.

Anders verhält es sich bei *Ungleichungen*. Beide Seiten des Vergleichs sind durch ein *Kleiner- oder Größer-Zeichen* verknüpft. Werden die Seiten von Ungleichungen vertauscht, kehrt sich das Vergleichszeichen um.

Ziel der Unterrichtseinheit ist es, von Mengenhandlungen ausgehend mathematische Beziehungen zu abstrahieren und deren Allgemeingültigkeit festzustellen:

BEISPIELE

- Fünf ist immer einer weniger/um eins weniger als sechs. Fünf ist immer einer mehr/um eins mehr als vier.
- Diese Erkenntnis gilt für alle Mengen, in denen sich fünf Elemente befinden und damit für die Zahl 5.
- Die Zahl 5 steht für alle Mengen mit fünf Elementen.
- Die Zahl 5 ist abstrakt und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden.
- Die Zahl 5 kann immer in fünf Einer zerlegt werden.

Die *Differenz/Der Unterschied* zweier Zahlen kann durch Subtraktion ermittelt werden: Von der größeren Zahl wird die kleinere Zahl abgezogen und übrig bleibt die Differenz/der Unterschied beider Zahlen.

Wird diese Differenz/der Unterschied zu der kleineren Zahl addiert, so ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl die Differenz/der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

- Um *Vergleichszeichen* korrekt einzusetzen, muss die Ausrichtung der Vergleichszeichen $>$ und $<$ richtig gedeutet werden.
- Mathematische Symbole beschreiben Sachverhalte. Die mathematischen Ideen hinter den Symbolen müssen verstanden werden.
- Die Deutung „mehr ist das, was mehr aussieht“, entsprechend „weniger ist das, was weniger

aussieht“, ist nicht immer zutreffend. So hat die Ausdehnung einer Menge nicht unmittelbar etwas mit der Anzahl der Elemente zu tun. Zum Beispiel sind zwei Mäuse mehr Tiere als ein Elefant.

- Es kann zu Irritationen kommen, wenn für mathematische Zusammenhänge mehrere Formulierungen/Begriffe möglich sind. Zum Beispiel ist mit „um wie viel mehr“ und „wie viel mehr“ der gleiche Sachverhalt gemeint. Oder: Differenz wird synonym mit Unterschied verwendet.
- Irritierend könnte sein, dass der Anzahlunterschied auch anhand der Anschauung ermittelt werden kann und nicht wie bisher zählend.
- Beim Vergleich von Zahlen wird der Begriff Unterschied auf Form und Größe der Symbole bezogen und nicht auf die mit den Zahlen verbundene Anzahl.
- Die größte Hürde liegt in der Abstraktion von Mengen auf Zahlen. Zahlen müssen als abstraktes, universelles Konstrukt verstanden werden.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Im Kapitel 2 *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* wird das kardinale Zahlverständnis besprochen. Zahlen geben die Anzahl an. Die Antwort auf die Frage: „Wie viele?“, führt zur Ermittlung der Anzahl. Wenn die Anzahlhaftigkeit deutlich geworden ist, folgt in logischer Konsequenz, dass die Reihenfolge der Elemente/Objekte bei der Ermittlung der Anzahl unwesentlich ist. Entscheidend ist nur die Anzahl der Elemente. Jedes einzelne Element entspricht der Anzahl eins und das Zusammenfassen der Einer/Einser führt zu einer Gesamtmenge, zur Anzahl an Elementen in dieser Menge.

Im Kapitel 3 *Mengen und Zahlen verändern* wird ein grundlegendes Verständnis der Rechenoperationen *Addition* und *Subtraktion* erarbeitet.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen*. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.

www.grundbildung.de

- Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianz: *Stufe 1*, S. 12
- Zählen: *Stufe 1*, S. 13f.
- Seriation: *Stufe 1*, S. 15f.
- Addition und Subtraktion: *Stufe 1*, S. 26ff.
- Rechenwege: *Stufe 1*, S. 20ff.
- Der Kardinale Zahlaspekt: *Stufe 1*, S. 28ff.
- Bedeutung der Symbolisierung: *Stufe 1*, S. 24
- Nichtzählende Strategien: *Stufe 1*, S. 20ff.
- Verständnis „mehr/weniger“, „um eins mehr/weniger“, „um zwei mehr/weniger“ *Stufe 1*, S. 34ff.

Michael Gaidoschik (2007/2015). *Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen*. Wien: G&G Verlag (8. Auflage).

Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.

V Welche Materialien werden benötigt?

- Steckwürfel
- Chips
- Holzsteine
- Karten 1 – 10
- Fingerbilder
- weitere Darstellungen der Zahlen