



2.3 (Ab-)Zählfehler und Zählprinzipien

EXPLORATION

Für die Teilnehmer*innen dieses Kurses ist es wichtig zu erfahren, welche Hindernisse sie in ihrem mathematischen Lernen behindert haben. Das Wissen um mathematische Hürden ist elementar, denn mit der Aufarbeitung dieser Hürden besteht für die Teilnehmer*innen die Chance, Mathematik verstehen lernen zu können und die Hürden, wenn noch nicht geschehen, zu beseitigen.

Eine basale Hürde kann das Zählen und Abzählen sein. Sicherlich können fast alle Teilnehmer*innen des Kurses heute fehlerfrei zählen und abzählen, jedoch muss das nicht heißen, dass sie dies schon fehlerfrei in der ersten Klasse beherrschten. Sollte dies nicht der Fall gewesen sein, war es für die Teilnehmer*innen schwierig, den nachfolgenden Inhalten des Mathematikunterrichtes zu folgen. Wie sollen das Addieren und Subtrahieren gelingen, wenn das Wissen um die Invarianz der Menge und das Wissen um die anderen sogenannten Zählprinzipien nicht vorliegen?

Der Begriff *Zählen* meint zunächst das Aufsagen der Zahlwortreihe, auch rückwärts und ab einer beliebigen Zahl. Der Begriff *Abzählen* steht für das korrekte Bestimmen der Anzahl der Elemente einer Menge, oft wird aber auch beim Abzählen von „*Zählen*“ gesprochen – das wird in diesem Text auch so sein.

Im folgenden Unterrichtskonzept wird das Abzählen näher betrachtet. Dazu werden einerseits die sogenannten Zählprinzipien (die korrekterweise Abzählprinzipien heißen müssten) erschlossen und andererseits mögliche Fehlerquellen beim Abzählen analysiert.

2.3.1 Kursgespräch und Gruppenarbeit (Ab-)Zählfehler und Zählprinzipien

Didaktische Ziele

- verschiedene Abzähltechniken (Antippen, Wegschieben, nur mit den Augen, mit Strukturierung) vergleichen und die eigene Abzähltechnik verbessern
- die wesentlichen Zählprinzipien verstehen und beim Abzählen einhalten

Im Kurs werden drei bis fünf Gruppen gebildet. Die Kursleitung bittet eine der Gruppen an einen Tisch, auf dem eine große (!) Menge Chips oder Steckwürfel liegt.

Nun soll jemand aus der Kleingruppe die Menge abzählen. Günstig ist es, wenn die anderen Gruppen den Zählprozess nicht beobachten können. Die restlichen Teilnehmer*innen könnten kurz den Raum verlassen, der Tisch mit den Chips bzw. Steckwürfeln wird außerhalb der Sichtweite positioniert oder die Gruppe, die gerade zählt, stellt sich in die Sichtachse. Wichtig ist außerdem, dass nur einmal gezählt werden darf und die restlichen Mitglieder der Kleingruppe aufgefordert werden, den Zählprozess genau zu beobachten.

Nun zählt immer ein*e Teilnehmer*in der Kleingruppe die Menge ab, die anderen Teilnehmer*innen der Kleingruppe beobachten währenddessen das Abzählen. Es kann durch Zählfehler dazu kommen, dass unterschiedliche Ergebnisse für dieselbe Menge genannt werden. Das wäre in dieser Situation durchaus erwünscht, denn so kann im Anschluss eine Diskussion im Plenum über Zählfehler oder Probleme im Zählprozess geführt werden. Sollten alle Teilnehmer*innen die gleiche Anzahl ermittelt haben, kann trotzdem besprochen werden, welche Fehlerquellen es bei der Anzahlbestimmung einer sehr großen Menge geben könnte.

Die Kursleitung notiert sich die jeweils ermittelte Menge, sodass die Resultate später miteinander verglichen werden können.

Dieses Vorgehen soll jetzt jede Kleingruppe durchlaufen: Die Gruppe geht an den Tisch mit den Chips bzw. Steckwürfeln, eine*r zählt und die anderen beobachten den Zählprozess, die Kursleitung notiert die ermittelten Anzahlen.

Anschließend werden, nun wieder mit dem kompletten Kurs, die Beobachtungen bezüglich des Zählprozesses verglichen:

*Wie/Mit welcher Zähltechnik haben die verschiedenen Teilnehmer*innen die Menge ausgezählt?*

Wurden die Gegenstände

- *angetippt,*
- *die einzelnen Gegenstände weggeschoben oder*
- *nur mit den Augen gezählt?*

*Welche dieser Zähltechniken scheint den Teilnehmer*innen am genauesten/sichersten/schnellsten?*

Bei welcher Zähltechnik könnten Fehler aufgetreten sein? Warum können dabei Fehler aufgetreten sein?

*Was denken die Teilnehmer*innen: Ist die Anzahl in jedem Fall korrekt bestimmt worden? Woran haben sie dies erkannt?*



Ziel der Fragen ist es, Unterschiede zwischen den Zähltechniken der Teilnehmer*innen (antippen, weg-schieben, nur mit den Augen) und mögliche Zählfehler oder Schwierigkeiten beim Abzählen zu analysieren.

Grundlage für eine genaue Analyse möglicher Probleme bei der Anzahlbestimmung können die sogenannten Zählprinzipien sein. Anhand dieser Prinzipien ist es möglich, die wesentlichen Fehlerquellen zu erkennen. Dabei soll es nicht darum gehen, dass die Teilnehmer*innen die Zählprinzipien erklären können. Ziel ist es, dass die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen entlang von Fragen, die sich aus den Zählprinzipien herleiten, jene Missverständnisse erkennen, die zu fehlerhaften Zählergebnissen führten. Es werden jene Zählfehler herausgearbeitet, die die Teilnehmer*innen früher gemacht haben oder u.U. immer noch machen.

DIE SOGENANTEN ZÄHLPRINZIPIEN

Stabilität der Zahlwortreihe

Die Zahlwortreihe hat eine feste Reihenfolge (...eins, zwei, drei...).

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- die Zahlwortreihe wurde nicht korrekt aufgesagt
 - es wurden Zahlen vergessen
 - Zahlen wurden doppelt genannt
 - die Reihenfolge der Zahlworte war durcheinander

Eins-zu-Eins-Zuordnung

Jedem Element wird genau ein Zahlwort zugeordnet, kein Element wird ausgelassen oder doppelt gezählt.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- es wurden Elemente doppelt gezählt
- einzelne Elemente wurde nicht gezählt

Kardinalzahlprinzip

Die letztgenannte Zahl bezeichnet die Anzahl der gesamten abgezählten Menge.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- Die*Der Teilnehmer*in denkt, die ermittelte Zahl stehe für das letzte Element (der fünfte Finger wird für „die Fünf“ gehalten).

Prinzip der Beliebigkeit der Reihenfolge

Die Reihenfolge, in der die Elemente gezählt werden, ist für das Zählergebnis egal.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- Die*Der Teilnehmer*in denkt, dass sich unterschiedliche Zählergebnisse ergeben können, wenn man die Elemente in anderer Reihenfolge zählt.

Invarianz der Menge

Wird kein Element entnommen oder hinzugefügt, muss die Menge gleich groß bleiben; die Anzahl kann sich nicht verändert haben.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- Die Anzahl der Elemente einer Menge wird als veränderlich angenommen, wenn sich die Anordnung der Elemente ändert, zum Beispiel durch Auseinanderziehen.

Abstraktionsprinzip

Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d. h. beim Zählen kommt es nicht auf die Art der Objekte an.

Das Abstraktionsprinzip steht im Widerspruch zur Überzeugung, dass nur Dinge, die einen gemeinsamen Oberbegriff haben, zusammengezählt werden können. Die Bildung von Oberbegriffen ist Gegenstand des vorangegangenen Kapitels 2.2.

Dieses Thema – Abstraktionsprinzip vs. Oberbegriffe – eignet sich gut zur Diskussion mit den Teilnehmer*innen. Hier können Überzeugungen argumentativ begründet werden, denn es gibt kein richtig oder falsch. Die Kursleitung macht die Thematisierung des Widerspruches vom Interesse der Teilnehmer*innen und vom Zeitbudget abhängig. Die Erprobung des vorliegenden Unterrichtskonzeptes hat gezeigt, dass diese Thematik von den Teilnehmer*innen als sehr interessant wahrgenommen wurde und sehr motivierend auf die Teilnehmer*innen wirkt.

Die Teilnehmer*innen fühlten sich nun auch in der Mathematik ernst genommen, in dem Fach, das bisher kaum das Gefühl der Selbstwirksamkeit gestärkt hat.

Mögliche Probleme bei der Anzahlermittlung/beim Zählen:

- Unterschiedlich farbige oder große Elemente zählt die*der Teilnehmer*in nicht zusammen: es sind 45 (grüne) und/oder 56 (blaue Würfel oder Chips), aber eben nicht 101.

Nach dem Vergleich der höchstwahrscheinlich unterschiedlichen Anzahlen sollen die Teilnehmer*innen überlegen, welche Fehler gemacht worden sein können. Diese möglichen Fehler werden an der Tafel notiert. Die Kursleitung kann, anhand der Zählprinzipien, mögliche Fehlerquellen ergänzen.

Den meisten Menschen sind die Zählprinzipien nicht bekannt und trotzdem wissen sie, wie man richtig zählt. Gibt es jedoch besondere Schwierigkeiten im Rechnen, können nicht verstandene oder nicht beachtete Zählprinzipien Ursache von Problemen im mathematischen Lernprozess (gewesen) sein.

Anschließend oder auch schon während der Fehler-sammlung sollten die eigenen Probleme beim Zählen reflektiert werden – egal, ob diese Probleme heute noch bestehen oder evtl. in der Grundschulzeit bestanden haben.

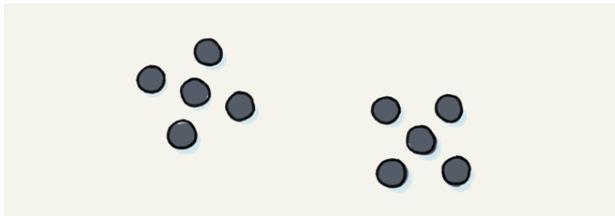
Dazu könnte Folgendes gefragt werden:

Sind Sie beim Zählen größerer Mengen manchmal einfach verzweifelt, weil Sie auf verschiedene Ergebnisse kommen?

Können Sie sich an Fehler beim Zählen oder Schwierigkeiten beim Zählen in Ihrer Kindheit erinnern? Welche Fehler haben Sie schon gemacht / sind Ihnen bereits passiert?

Haben Sie Fehler beim Zählen, z. B. während Ihrer Schulzeit, bei anderen Kindern beobachtet? Welche sind das gewesen?

Zu guter Letzt sollte die korrekte Anzahl an Steckwürfeln/Chips ermittelt werden. Gemeinsam wird überlegt, wie man möglichst genau, sicher und schnell die Anzahl unüberschaubarer Mengen ermitteln kann. Als hilfreich hat sich das Bilden strukturierter Mengen (z. B. Zehnermengen, Fünfer- oder Zweierstrukturen) erwiesen. Durch das Strukturieren kann der Überblick leichter behalten werden und anschließend wird, wie in diesem Beispiel, in Zehnerschritten abgezählt. Die Zehner können z. B. als zwei Fünfer-Würfelbilder gelegt werden, so fallen Zählfehler bei der Anzahlbestimmung schnell auf.



Mehr zur Arbeit mit strukturierten Mengen können Sie im Einleitungsteil des 3. Kapitels, S. 32 f, des DVV-Rahmencurriculum Rechnen nachlesen.

RÜCKSCHAU

In der vorangegangenen Stunde haben die Teilnehmer*innen eigene oder allgemeine Schwierigkeiten beim Erfassen von Mengen analysiert. Es wurde deutlich, dass eine vermeintlich „leichte“ Fähigkeit wie das Zählen manches Hindernis in sich bergen kann.

Die Zahlwortreihe muss sicher beherrscht werden. Zudem darf jedem Element nur genau ein Zahlwort zugeordnet werden. Die letztgenannte Zahl bezeichnet die Gesamtheit der abgezählten Menge, nicht nur das letzte Element. Es ist egal, in welcher Reihenfolge die Elemente gezählt werden. Wenn kein Element hinzugefügt oder weggenommen wird, bleibt die Anzahl gleich.

Große Mengen lassen sich außerdem leichter zählen, wenn sie strukturiert sind. Die Strukturierung der Menge verringert das Risiko, dass Elemente doppelt oder gar nicht gezählt werden.