vhs-Lernportal
vhs.link/KDQ6HB

13.2 Das kleine Einmaleins

Didaktisches Ziel
Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben als Kernaufgaben für Ableitungsstrategien herleiten und automatisieren

EXPLORATION

In den folgenden Unterrichtsgesprächen und Einzelarbeitszeiten wird mit den Teilnehmer*innen erarbeitet, wie sie Mal-Aufgaben ableiten können. Das kleine Einmaleins wird nicht Reihe für Reihe auswendig gelernt, sondern die Teilnehmer*innen werden mit ihrem vorhandenen Wissen um die Operationslogik der Multiplikation zukünftig alle Aufgaben berechnen können. Nach mehrmaligem Herleiten der Aufgaben routinisieren die Teilnehmer*innen i. d. R. das kleine Einmaleins.

In einem ersten Schritt werden die eventuell schon bekannten und zum Herleiten besonders wichtigen Mal-Aufgaben besprochen – die Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben. Diese kann man als Kernaufgaben oder Ankeraufgaben für alle weiteren Malaufgaben verstehen. Viele Teilnehmer*innen wissen schon die Antwort auf die Frage „Wie viel ist zehnmal fünf?“. Trotzdem ist es für die dauerhafte Automatisation hilfreich zu wissen, wie diese Lösung zustande kommt. Nur so sind sie in der Lage, bei Unsicherheit Ergebnisse zu überprüfen, indem sie Multiplikations-Aufgaben ableiten. Die Teilnehmer*innen werden am Ende dieses Kurses also nicht nur wissen, dass 10 · 5 insgesamt 50 sind, sondern auch, warum dies so ist.

Haben sie die Logik des Ableitens verstanden, werden sie später auch Aufgaben mit großen Faktoren berechnen können. Dazu ein Beispiel: Wenn bekannt ist, was bei der Verzehnfachung einer Zahl passiert, können die Teilnehmer*innen später auch Aufgaben wie 10 · 18 berechnen.

Nach der Beschäftigung mit Zehnmal-Aufgaben wird die Berechnung von Zweimal-Aufgaben näher betrachtet. Zweimal-Aufgaben sind deshalb einfach zu berechnen, weil die Zahlen *nur* verdoppelt werden, was bei der Addition im Zahlenraum 20 bereits thematisiert wurde. Diese Verdoppelung wird Gegenstand des Kursgespräches *Zweimal* und der Einzelarbeit *Zehnmal- und Zweimal-Aufgaben* sein.

Auch die Fünfmal-Aufgaben sind einigen Teilnehmer*innen bereits bekannt. Für diese wird anschließend ein Weg zur Herleitung erarbeitet.

Die anderen Mal-Aufgaben (z. B. Dreimal-Aufgaben, Achtmal-Aufgaben usw.) können schließlich mit dem Wissen um die Zehnmal-, Zweimal-, Fünfmal- und Einmal-Aufgaben abgeleitet werden. Mithilfe des Wissens um die Operationslogik der Multiplikation werden alle Aufgaben des Einmaleins her- bzw. abgeleitet.[4]

Die Teilnehmer*innen sind in den nachfolgenden Stunden aufgefordert, möglichst viele mathematische Zusammenhänge selbst zu entdecken. Für die Zahlen Eins bis Fünf stehen Vorlagen für Mengenbilder zur Verfügung. Die Zahlen Sechs bis Zehn setzen die Teilnehmer*innen aus den vorliegenden Mengenbildern der Zahlen Eins bis Fünf zusammen. Mit diesen Mengenbildern werden Mal-Aufgaben visualisiert, sodass die Teilnehmer*innen Strukturen erkennen können, die für das Ableiten der Mal-Aufgaben wichtig sind.

13.2.1 Kursgespräch – Zehnmal

Didaktisches Ziel
Mengen im Hunderterfeld verzehnfachen und über den Faktorentausch Zehner im Hunderterfeld erkennen (z. B. 10 · 3 = 3 · 10)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung stellt allen Teilnehmer*innen ein laminiertes Hunderterfeld[5] zur Verfügung. In dieses können Mal-Aufgaben eingezeichnet werden. Werden Mal-Aufgaben in ein Hunderterfeld eingezeichnet, ist besonders der Faktorentausch gut nachzuvollziehen.

Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen

Die Kursleitung bittet alle Teilnehmer*innen, zehnmal die Drei (10 · 3) in das Hunderterfeld einzuzeichnen.

Nach dem Einzeichnen könnte die Anordnung wie folgt aussehen.

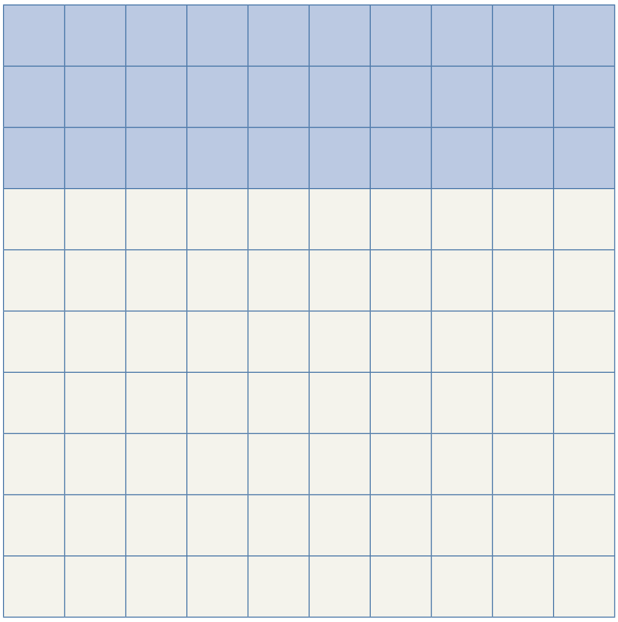


Abbildung 13.2-1 Waagerechte Kennzeichnung von 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Die Dreiermengen wurden jeweils senkrecht eingezeichnet. Es sind zehn Dreiermengen eingezeichnet. Sollten die Teilnehmer*innen die Dreier durcheinander gemalt haben, werden sie gebeten, immer eine Dreiermenge in eine Zeile oder in eine Spalte zu zeichnen. Es ist auch möglich, die Dreiermengen waagerecht einzuzeichnen.

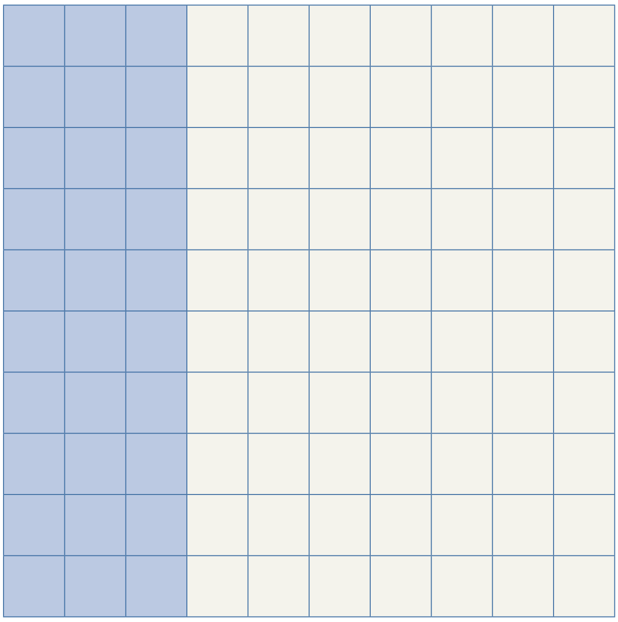


Abbildung 13.2-2 Senkrechte Kennzeichnung von 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Bleiben wir beim ersten Beispiel – die Dreiermengen wurden waagerecht eingezeichnet.

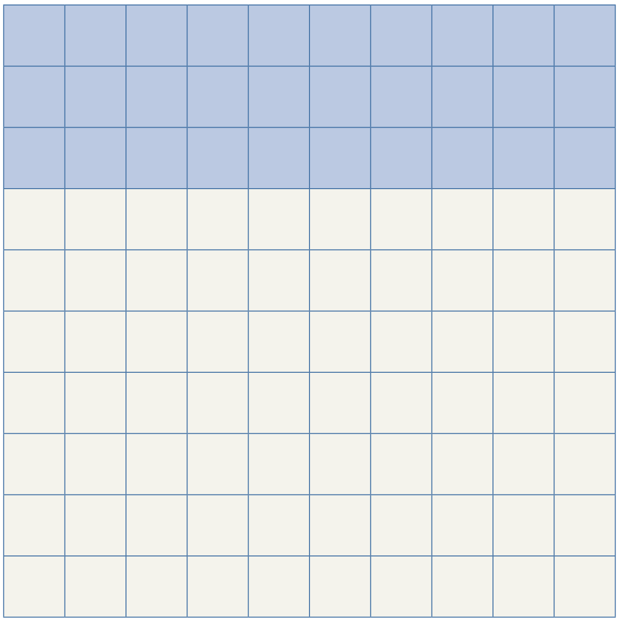
Mögliche Fragen der Kursleitung an die Teilnehmer*innen zur Herausarbeitung der Gesamt- und Teilmengen sind:

Wie viel sind 10 · 3 insgesamt?

Kann man im Hunderterfeld leicht erkennen, dass 10 · 3 insgesamt 30 sind? Woran kann man sehen, dass es insgesamt 30 sind?

Wie viele Kästchen/Punkte haben Sie insgesamt eingezeichnet?

Was können Sie in dieser Anordnung (alle Dreier in einer Linie nebeneinander) gut erkennen?



3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3
= 10 · 3 = 30

Abbildung 13.2-3 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 10 · 3 in einem Hunderterfeld

Die Dreiermenge ist zehnmal vorhanden. Alle Teilnehmer*innen haben die entsprechende Mengenhandlung durchgeführt, indem sie die Drei zehnmal eingezeichnet haben. Sie haben dabei die Dreiermenge vervielfacht. Zudem ist am Hunderterfeld gut zu erkennen, dass bei der Multiplikation die Gesamtmenge gesucht wird, denn es wurden insgesamt 30 Punkte/Kästchen eingezeichnet.

Anwendung des Faktorentausches

Die Kursleitung fragt die Teilnehmer*innen:

> *Wie heißt die Malaufgabe, wenn ich nun die waagerechten Mengen betrachte?*
>
> *Welche Malaufgabe können Sie erkennen, wenn Sie die waagerechten Mengen betrachten?*

Nun werden die Mengen betrachtet, die waagerecht in einer Reihe sind. Das sind jeweils zehn. Von den waagerechten Zehnern sind insgesamt drei vorhanden. Also: 3 · 10 = 30. Wenn zehnmal die Drei vorhanden ist, lassen sich im Umkehrschluss auch dreimal die Zehn – drei Zehner – finden.

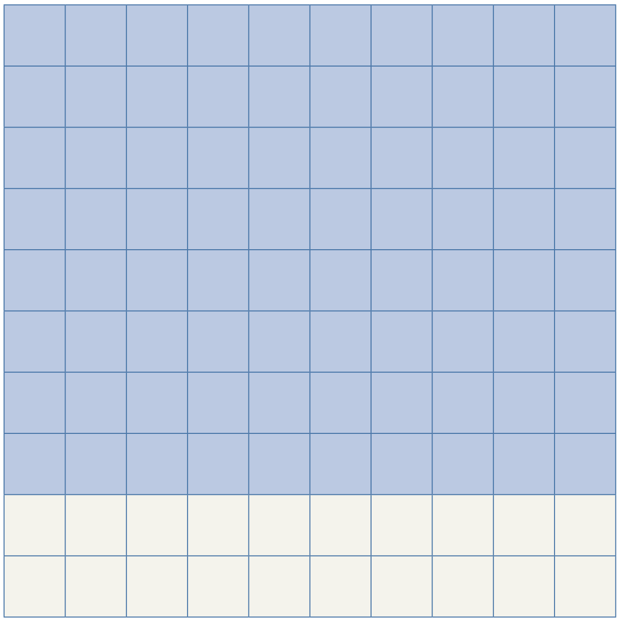
Der soeben beschriebene Zusammenhang kann mit allen Zehnmal-Aufgaben verdeutlicht werden, sobald die Mengen in geordnete Reihen gelegt werden. Sobald eine Zahl zehnmal vorhanden ist, sind entsprechend der Zahl, die verzehnfacht wurde, gleich viele Zehner vorhanden.

10 · 5 = 5 · 10 = fünf Zehner
10 · 9 = 9 · 10 = neun Zehner

Weitere Beispiele eines Faktorentausches bei Zehnmal-Aufgaben

Es ist empfehlenswert, noch mindestens ein weiteres Beispiel für den Faktorentausch bei einer Verzehnfachung zu betrachten. Der Zusammenhang wird auf dem **Aufgabenblatt 13.2 a** zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Unterrichtskonzept noch weiter vertieft.

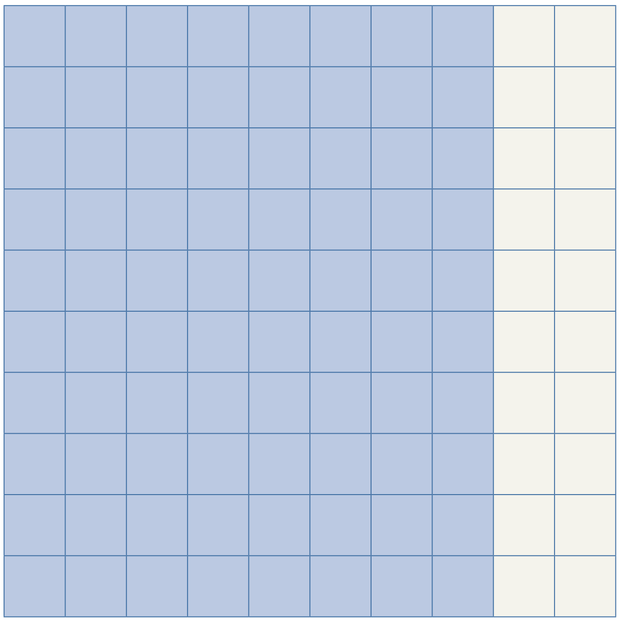
Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen auf, eine Achtermenge in eine Spalte des Hunderterfeldes zu zeichnen. Anschließend soll diese Achtermenge verzehnfacht werden. Die Teilnehmer*innen haben 10 · 8 Kästchen angemalt.



8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8
= 10 · 8 = 80

Abbildung 13.2-4 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 10 · 8 in einem Hunderterfeld

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, das Blatt einmal (um 90 Grad/um ein Viertel) zu drehen. Nach der Drehung ist zu erkennen, dass in jeder Spalte zehn Einer sind.



10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10
= 8 · 10 = 80

Abbildung 13.2-5 Plus-Aufgabe zur Mal-Aufgabe 8 · 10 in einem Hunderterfeld

Die Kursleitung fasst zusammen.

> *Wenn zehnmal die Acht vorhanden ist, müssen auch acht Zehner vorhanden sein.*

Die Kursleitung schätzt ab, ob weitere Übungen erforderlich sind oder ob thematisch zur nachfolgenden Unterrichtssequenz Zweimal-Aufgaben übergegangen werden kann.

Wichtig ist die Erkenntnis, dass bei Zehnmal-Aufgaben entsprechend viele Zehner vorhanden sind. Denn zehnmal die Sechs heißt auch, es ist sechsmal die Zehn vorhanden, also sechs Zehner (= 60). Dieser Zusammenhang sollte den Teilnehmer*innen an der Arbeit mit dem Hunderterfeld deutlich geworden sein. Es soll ein Verständnis geschaffen werden, das über „man muss nur eine Null anhängen" hinausgeht.

13.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt 13.2 a – Zweimal

> **Didaktisches Ziel**
> Zweimal-Aufgaben als additive Verdoppelungsaufgabe verstehen (z. B. 2 · 8 = 8 + 8)

In diesem Kursgespräch werden Zweimal-Aufgaben erarbeitet und berechnet. Die Teilnehmer*innen sollen verstehen, dass jede Zweimal-Aufgabe den Auftrag zur Verdoppelung der Ausgangszahl enthält. Die Kursleitung gibt den Auftrag, Zweimal-Aufgaben, wie z. B. 2 · 5 oder 2 · 8 als Plusaufgabe aufzuschreiben, also 2 · 5 = 5 + 5 oder 2 · 8 = 8 + 8, etc.

An dieser Stelle geht es noch nicht um das Berechnen der Ergebnisse, sondern vorerst um das Entdecken des Zusammenhangs der Addition von zwei gleichen Summanden zum Zweimalnehmen.

Danach fragt die Kursleitung die Teilnehmer*innen:

> *Wie kann man Aufgaben ausrechnen, bei denen etwas zweimal vorhanden ist?*
>
> *Geht das auch bei großen Zahlen? Zum Beispiel bei 2 · 3000 oder 2 · 4 Millionen?*

Die Teilnehmer*innen sollen verstehen, dass zweimal nehmen und die additive Verdoppelung einer Zahl dasselbe sind. Formal kann das wie folgt formuliert werden: $2 \cdot x = x + x$.

In der Folge geht es darum, dass die Teilnehmer*innen alle Zweimal-Aufgaben schnell berechnen können, weil sie das Prinzip der Verdoppelung verstanden haben und die Strategien der additiven Verdoppelung als Hilfe nutzen können.

Am **Aufgabenblatt 13.2 a** können Teilnehmer*innen bei Bedarf den Zusammenhang von Plus und Mal an Mengendarstellungen im Zwanzigerfeld festigen und üben.

13.2.3 Kursgespräch – Fünfmal

> **Didaktisches Ziel**
> Fünfmal-Aufgaben als die Hälfte der Zehnmal-Aufgaben der gleichen Zahl verstehen

Auch *Fünfmal-Aufgaben* sind eine wichtige Grundlage zum Ableiten von Einmaleins-Aufgaben. Die *Fünferreihe* ist als *Malreihe*[6], ebenso wie die *Zehner- und Zweierreihe* in der Regel einfach und rasch zu automatisieren, aber hier muss erstmals ein Ableitungszusammenhang verstanden und verwendet werden. Um *Fünfmal-Aufgaben* zu berechnen, wird die Gesamtmenge einer Zehnermultiplikation halbiert. Denn die Besonderheit bei Fünfmal-Aufgaben ist, dass die Gesamtmenge einer Fünfmal-Aufgabe immer genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl ist. Das ist für die meisten, die das Einmaleins über das Memorieren von Reihen erlernt haben, ein neuer Gedanke. Dafür ein Beispiel:

10 · 4 = 40 → deshalb ist 5 · 4 = 20 (■) → weil in 10 · 4 einmal 5 · 4 (■) und noch einmal 5 · 4 (◆) enthalten sind (s. Abbildung 13.2-6).

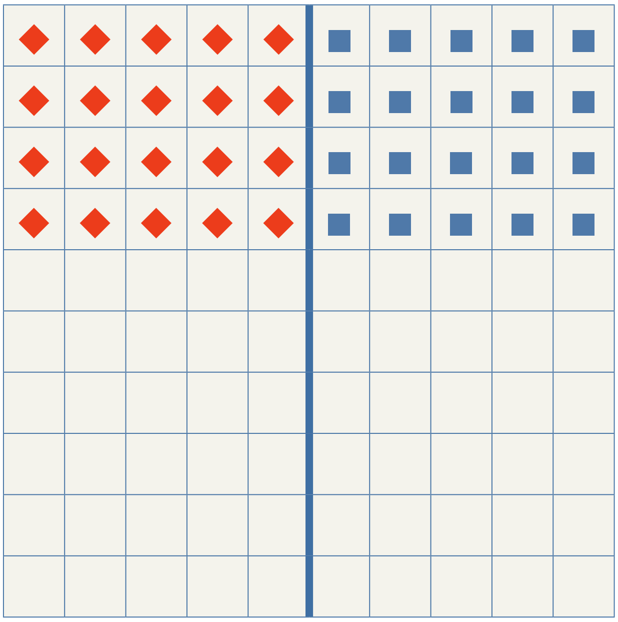


Abbildung 13.2-6

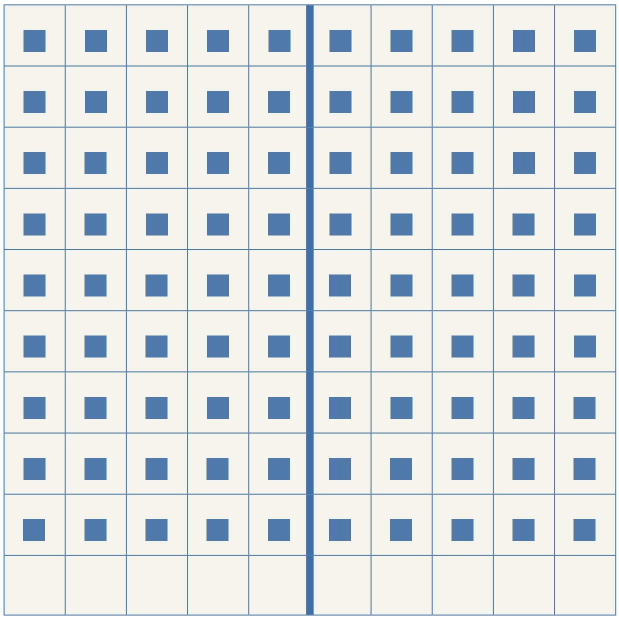


Abbildung 13.2-7

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Um dies zu veranschaulichen, zeichnet die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen eine Zehnmal-Aufgabe in das Hunderterfeld. Sollte der Kurs zu groß sein, kann die Kursleitung die Mengen auch an die Tafel zeichnen oder einen Overheadprojektor benutzen. Zum Beispiel könnte viermal zehn, wie in der obigen Abbildung 13.2-6, eingezeichnet werden. Die Menge soll anschließend so geteilt werden, dass die Zehner in Fünf und Fünf getrennt sind.

Nachfolgend ein weiteres Beispiel. Die Kursleitung zeichnet erneut mit dem Kurs eine Zehnmal-Aufgabe in ein Hunderterfeld: z. B. zehnmal die Neun (10 · 9) bzw. neunmal zehn[7] (9 · 10).

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, einen Strich senkrecht und mittig durch das Hunderterfeld zu ziehen. Die Kursleitung fragt:

Welche Malaufgabe sehen Sie nun auf der linken Seite der Linie?

Welche Malaufgabe sehen Sie auf der rechten Seite der Linie?

Sind rechts und links unterschiedlich oder sind gleich viele Kästchen gekennzeichnet?

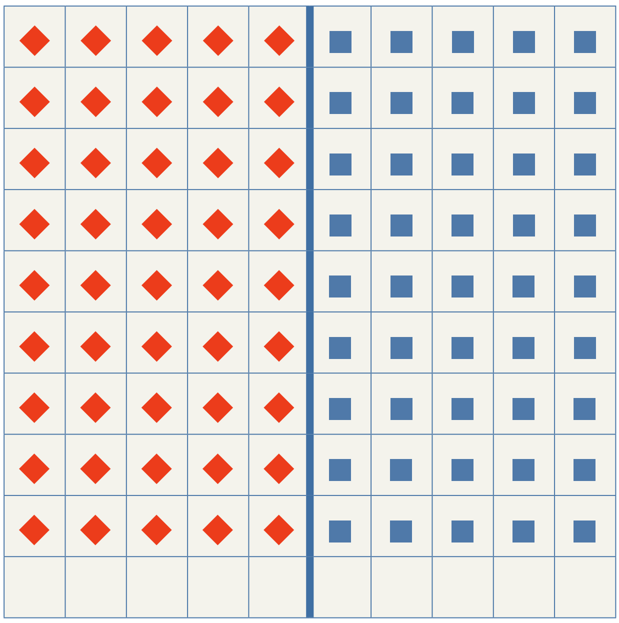


Abbildung 13.2-8

Wenn die Teilnehmer*innen erkannt haben, dass nun die Aufgaben 5 · 9 (◆) und 5 · 9 (■), bzw. 9 · 5 (◆) und 9 · 5 (■), zu sehen sind, erfragt die Kursleitung, wie viele Punkte/Quadrate nun in dem einen und dem anderen Feld sein müssen. Hierbei ist es wichtig zu erkennen, dass in beiden Hälften genau gleich viele Punkte sind. Die Gesamtmenge wurde genau halbiert.

Die Kursleitung lässt im Anschluss die Teilnehmer*innen selbstständig eine Aufgabe finden, mit der sie zeigen können, dass fünfmal die Hälfte von zehnmal sein muss.

Es ist zwar schnell erklärt, wie man von Zehnmal-Aufgaben zu Fünfmal-Aufgaben gelangt, wirklich sicher ist das Wissen jedoch erst, wenn die*der Teilnehmer*in den Zusammenhang (eventuell mehrfach) selbst entdeckt und mehrmals selbstständig mit dem Sachverhalt umgeht.

Die wichtigsten Erkenntnisse zu diesem Zeitpunkt sind:

Bei der mittigen Zerlegung einer verzehnfachten Menge wird die Gesamtmenge genau halbiert.

Ist die Gesamtmenge halbiert, ist zu erkennen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe genau zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind.

$$10 \cdot 9 = 5 \cdot 9 + 5 \cdot 9$$
$$90 = 45 + 45$$

Demnach muss die Fünfmal-Aufgabe einer Zahl genau die Hälfte der Zehnmal-Aufgabe der gleichen Zahl sein.

13.2.4 Einzelarbeit und Aufgabenblätter 13.2 b und 13.2 c – Fünfmal-Aufgaben

Didaktisches Ziel
Fünfmal-Aufgaben aus Zehnmal-Aufgaben ableiten

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.2 b / c

Alle Aufgabenblätter legen den Fokus auf die Mengenbetrachtung bei Mal-Aufgaben. Es ist nicht entscheidend, wie schnell die Lösungen berechnet werden. Vielmehr sollen die Teilnehmer*innen verstehen, dass in einer Zehnmal-Aufgabe zwei Fünfmal-Aufgaben enthalten sind und dass sie deshalb nur die Gesamtmenge der Zehnmal-Aufgabe halbieren müssen. So erfahren sie, wie viele es insgesamt sind, wenn sie eine Zahl fünfmal haben.

Die Kursleitung achtet darauf, dass alle Teilnehmer*innen die Aufgabenstellung verstanden haben. Die Fragestellungen werden gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durchgegangen, ohne jedoch bereits Lösungen zu nennen. Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer*innen daran, Fragen zu stellen, falls sie etwas nicht verstanden haben.

Die Bearbeitungszeit je Aufgabenblatt wird zwischen zehn und 15 Minuten betragen. Es wird vorerst nur ein Aufgabenblatt ausgegeben und im Anschluss an die Bearbeitung werden die Lösungen im Kurs besprochen. Wenn die Gruppendynamik es zulässt, finden sich nach der Bearbeitung Zweiergruppen zusammen. Sie vergleichen ihre Lösungen miteinander und besprechen diese.

Die Teilnehmer*innen werden immer wieder aufgefordert, ihre Lösungen zu begründen. Wenn nötig, kann die Kursleitung auch falsche Behauptungen aufstellen, um eine Diskussion anzustoßen. Die Kursleitung behauptet z. B.:

Im linken Kasten sind eindeutig mehr Kreise als Quadrate als im rechten Kasten.
Im linken und rechten Kasten sind unterschiedliche Aufgaben eingezeichnet.

Man muss immer nochmal nachzählen, ob die verfünffachte Menge wirklich die Hälfte der zehnfachen Menge ist.

Es besteht für die Kursleitung die Möglichkeit, ähnliche Aufgabenblätter zu erstellen. Dafür sind die **Kopiervorlagen 9** und **10** vorgesehen.

13.2.5 Routinisierungsaufgabe – Einmaleins – Kernaufgaben würfeln

Didaktisches Ziel
Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben: Ableitungen wiederholen und Ergebnisse spielerisch automatisieren

Die Teilnehmer*innen bilden Zweiergruppen. Jede Gruppe erhält zwei Würfel, einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10 und einen Würfel, auf den die Zahlen 2, 5 und 10 geklebt wurden. Dazu können Notizklebezettel oder normales Papier, das mit Klebestreifen am Würfel befestigt wird, genutzt werden.

Wenn die Teilnehmer*innen würfeln, bekommen sie immer eine Aufgabe in Kombination aus:

2 · irgendeine Zahl (1 bis 10)
5 · irgendeine Zahl (1 bis 10)
10 · irgendeine Zahl (1 bis 10)

Der gebastelte Würfel mit den Zahlen 2, 5 und 10 ist immer (!) der erste Faktor. Es kann demnach nicht die Aufgabe 7 · 10, sondern nur die Aufgabe 10 · 7 gewürfelt werden. Diese Festlegung, welcher der erste und welcher der zweite Faktor ist, wird verhindern, dass Teilnehmer*innen bestimmte Herleitungen vermeiden. Werden einige Wege der Ableitung vermieden, besteht i. d. R. eine Wissenslücke. Können die Teilnehmer*innen hingegen flexibel herleiten, weil sie alle Zusammenhänge verstanden haben, werden sie immer den schnelleren Weg nutzen.

Nun werden abwechselnd Aufgaben gewürfelt und anschließend berechnet. Es sollte nicht nur die Lösung gesagt werden, sondern immer auch, wie diese Aufgabe berechnet werden kann, wenn man das Ergebnis nicht weiß. Die Teilnehmer*innen sollen die Herleitung der Zweimal-, Fünfmal- und Zehnmal-Aufgaben üben. Sollten die Teilnehmer*innen Schwierigkeiten haben, den Rechenweg zu formulieren, hilft die Vorstellung, die Aufgabe jemandem erklären zu müssen, der die Aufgabe nicht lösen kann. Sind die Teilnehmer*innen im Formulieren des Rechenweges geübt, werden sie schon während des Herleitens ihren Rechenweg beschreiben – sie denken laut.

Nach der Herleitung der Mal-Aufgabe wird die Gesamtmenge notiert.

Nun würfelt die zweite Person auch eine Aufgabe und löst diese. Auch hier sollte erklärt werden, wie zur Lösung gekommen wurde bzw. wie die Aufgabe gelöst werden kann, wenn man die Lösung noch nicht weiß.

Schließlich berechnet der*die Mitspieler*in mit der größeren Zahl den Unterschied zwischen den gewürfelten Zahlen und erhält diese als Punkte. Anstatt in Form von Punkten, kann der Unterschied auch mit Spielgeld ausgezahlt werden.

Nachfolgend eine Spielanleitung für den Kurs und ein praktisches Beispiel zu diesem Spiel.

SPIELABLAUF: 1 · 1-WÜRFELSPIEL

- Spieler*in 1 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
- Spieler*in 1 erklärt, wie man diese Aufgabe errechnen kann.
- Spieler*in 2 würfelt und rechnet die Mal-Aufgabe aus.
- Spieler*in 2 erklärt, wie diese Aufgabe ausgerechnet werden kann.
- Die Spieler*innen vergleichen ihre erwürfelten Zahlen.
- Der*Die Spieler*in mit der größeren Zahl errechnet den Unterschied und bekommt diesen als Punkte gutgeschrieben.
- Wer am Ende die meisten Punkte hat, gewinnt das Spiel.

BEISPIEL

Das 1 · 1-Würfelspiel

Jutta würfelt eine 5 und eine 7. Sie soll die Aufgabe 5 · 7 berechnen. Ihr fällt sofort ein, dass es insgesamt 35 sind, sie muss aber noch erklären, wie sie die Aufgabe errechnen würde, wenn sie die Lösung nicht wüsste. Jutta sagt: „Ich weiß ja was 10 · 7 ist. Das sind 70. Und dann die Hälfte: sind 35."

Justus würfelt 10 und 3. Er erklärt: „Bei 10 · 3 ist zehnmal die Drei da, das ist dasselbe wie dreimal die Zehn. Deshalb sind es insgesamt 30."

Da Jutta die größere Zahl gewürfelt hat, muss sie den Unterschied von 30 und 35 berechnen. Sie bekommt 5 Punkte gutgeschrieben.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Sie können nun Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben herleiten. Die Teilnehmer*innen wussten vielleicht schon vorher die Zehnerreihe auswendig und ihnen war bekannt, dass bei Zehnmal-Aufgaben nur eine Null angehängt werden muss. Nun wissen sie aber auch, warum das so ist.
- Den Teilnehmer*innen ist nun bekannt, dass bei der Verzehnfachung einer Zahl (10 · ____) diese Zahl dann zehnmal vorhanden ist (____ · 10). Es werden Zehner gebildet. Und zwar genau so viele Zehner wie die Zahl, die verzehnfacht werden soll. Das ist die Begründung dafür, dass einfach nur Nullen angehängt werden müssen.
- Des Weiteren wissen die Teilnehmer*innen nun, dass es sich bei Zweimal-Aufgaben um die Aufforderung handelt, die Ausgangsmenge zu verdoppeln. Wenn eine Menge zweimal vorhanden ist, ist es genauso, wie wenn zu dieser Menge die gleiche Menge addiert wird (____ + ____).
- Außerdem können die Teilnehmer*innen von Zehnmal-Aufgaben alle Fünfmal-Aufgaben ableiten. Dazu wird die Gesamtmenge, die durch die Verzehnfachung entstanden ist, halbiert. Denn wenn eine Zahl zehnmal vorhanden ist, ist sie fünfmal und noch einmal fünfmal vorhanden.

13.2.6 Ableitungsstrategien erkunden und anwenden

Didaktische Ziele

- Zusammenhänge zwischen einzelnen Malaufgaben systematisch erkunden
- Ableitungen zum Berechnen von Einmaleins-Aufgaben benutzen

EXPLORATION

Sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins (und darüber hinaus) können aus den bereits erarbeiteten Kernaufgaben Zehnmal, Zweimal und Fünfmal abgeleitet, das heißt errechnet werden. Die dafür wesentlichen Strategien beruhen auf den Prinzipien des Verdoppelns oder der Nachbaraufgaben.

Die möglichen Ableitungswege aller weiteren Aufgaben im Überblick:

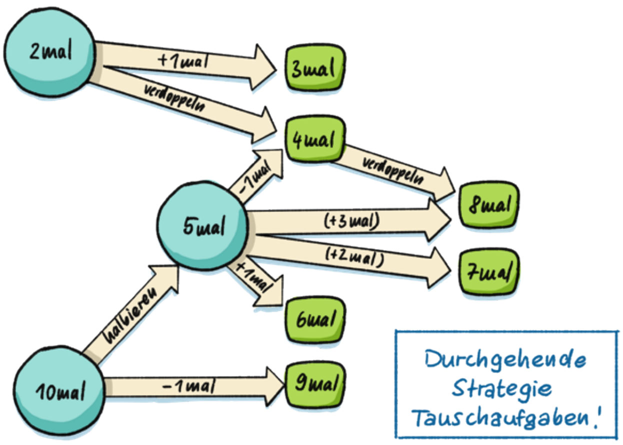


Abbildung 13.2-9

Dreimal lässt sich von Zweimal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl noch einmal dazu“ erarbeiten:
$3 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 6$, also $12 + 6 = 18$, usw.

Viermal kann auch von Zweimal ausgehend über den Gedanken der Verdoppelung erarbeitet werden:
$4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6$, also $12 + 12 = 24$, usw.

Oder von Fünfmal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl einmal weg“:
$5 \cdot 6 = 30$, $4 \cdot 6$ ist also $30 - 6 = 24$.

Für Sechsmal bietet sich „Fünfmal und noch einmal dazu“ an:
$5 \cdot 8 = 40$, daher $6 \cdot 8 = 40 + 8 = 48$.

Neunmal ist über Zehnmal minus Einmal unschwer zu errechnen:
$9 \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 7 = 63$

Mit den bislang genannten Strategien lassen sich – unter Berücksichtigung des Prinzips der Tauschaufgabe ($9 \cdot 7 = 7 \cdot 9$ etc.) – sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins einfach ableiten, mit Ausnahme von zwei Malaufgaben, nämlich $7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$ sowie $8 \cdot 8$.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Wie Ableitungsstrategien erarbeitet werden können, wird im Folgenden am Beispiel der Neunmal-Aufgaben kurz dargestellt. Für die Erarbeitung der weiteren Strategien gelten analoge Empfehlungen. An dieser Stelle geht es in erster Linie darum, Verständnis für den operativen Zusammenhang zwischen Kernaufgabe und zu ermittelnder Aufgabe handelnd zu erarbeiten, die Ergebnisse der Aufgaben stehen dabei nicht im Vordergrund.

Für die aktive Erkundung der Zusammenhänge eignen sich einerseits Steckwürfel, andererseits das Hunderterfeld. Je nach Gruppe kann entschieden werden, ob zuerst der etwas zeitaufwändigere Weg der Mengenhandlungen mit Steckwürfeln oder gleich der direkte Einstieg mit dem Hunderterfeld gewählt wird.

Erster möglicher Weg: Die Kursteilnehmer*innen werden aufgefordert, z. B. $10 \cdot 4$ mit Steckwürfeln zu legen. Man kann zum Einsparen von Zeit auch Steckwürfeltürme zu je 4 Würfeln vorbereiten. Es sollte nach Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel allen Teilnehmer*innen klar sein, dass für $10 \cdot 4$ zehn Türme mit je vier Würfeln benötigt werden. Dann die Frage:

„Was müssen Sie tun, damit daraus $9 \cdot 4$ wird?“

Die Lösung: „Ich muss einen Viererturm wegnehmen!“ Da es an dieser Stelle darum geht, Verständnis für den Zusammenhang von "zehnmal" und „neunmal“ zu erarbeiten, ist es nicht notwendig, sofort mit der Ergebnisermittlung weiterzumachen. Vielmehr lohnt es, denselben operativen Zusammenhang (wieder ohne auszurechnen) auch an anderen Aufgabenpaaren zu erforschen, also etwa:

„Legen Sie 10 · 6!“

„Machen Sie daraus 9 · 6!“

„Legen Sie 10 · 8!“

„Wie wird daraus 9 · 8?“ und so weiter.

Erst in weiterer Folge sollte die Aufmerksamkeit auf das Ergebnis und dessen rechnerische Ermittlung gelenkt werden. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Zehnmal-Aufgaben als Kernaufgaben automatisiert sind und dass das Subtrahieren von einer Zehnerzahl („Entbündeln“) keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Wenn auf der Handlungsebene für z. B. 9 · 4 zunächst 10 · 4 gebildet und dann vier weggenommen wurden, soll überlegt werden, wie man ausrechnen könnte, wie viel 9 · 4 ist. Viele Kursteilnehmer*innen werden ohne weitere vermittelnden Fragen und Denkanstöße selbst darauf kommen, dass dem Wegnehmen von einem Vierer-Turm die Rechnung 40 – 4 entspricht. Wenn dabei Schwierigkeiten auffallen, bieten Strategiekonferenzen oder Gruppengespräche weitere Lernchancen. Durch Fragen und Denkanstöße kann und soll die Kursleitung Hilfe beim Selbst-Entdecken bieten.

Eine weitere Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen Kernaufgaben und neuen, noch nicht automatisierten, also subjektiv meist als schwieriger eingeschätzten Malaufgaben zu erkunden, ist das Hunderterfeld oder 100-Punkte-Feld, das schon für die Erarbeitung der Zehnmal und Fünfmalaufgaben benutzt wurde. Die folierten Punktefelder (**Kopiervorlage 7**) bieten sich auch hier wieder für ein rasches Darstellen von Multiplikationen an.

Dafür braucht es zusätzlich einen Abdeckwinkel aus Papier oder Karton in passender Größe, der es erlaubt, jede Aufgabe des kleinen Einmaleins durch einfaches Anlegen des Winkels darzustellen und durch Verschieben des Winkels in eine andere Aufgabe zu verwandeln.

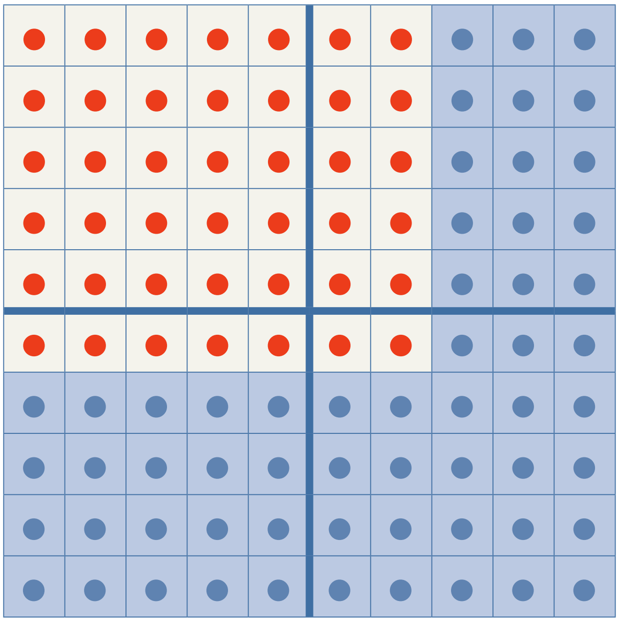


Abbildung 13.2-10 Darstellung der Aufgabe 7 · 6 (oder auch 6 · 7) am Hunderterfeld mit Abdeckwinkel

Die Fünfer-Gliederung der Punkte am 100-Punkte-Feld erlaubt nicht-zählendes Erkennen der dargestellten Anzahl von Reihen und Spalten, bzw. nicht-zählendes Anlegen des Abdeckwinkels auf eine beliebige Anzahl von Reihen und Spalten.

Das Arbeiten am Operationsverständnis und am Verstehen operativer Zusammenhänge wird durch dieses Arbeitsmittel wesentlich erleichtert: Kursteilnehmer*innen erhalten den Auftrag, bestimmte Malaufgaben auf ihren 100-Punkte-Feldern mit dem Abdeckwinkel darzustellen. Umgekehrt können die Kursteilnehmer*innen aufgefordert werden, zu vorgelegten Darstellungen die zugehörigen Malaufgaben zu nennen. Die eingangs skizzierten Zusammenhänge zwischen Malaufgaben können durch einfaches Verschieben des Abdeckwinkels entdeckt werden. Um aus 5 · 7 die benachbarte Aufgabe 6 · 7 zu machen, verschiebt man den Abdeckwinkel um eine Reihe und eine weitere Reihe von 7 Punkten kommt dazu. Wichtig an dieser Stelle ist das Versprachlichen der Handlungen zur Absicherung des Verständnisses der Zusammenhänge und somit der möglichen Ableitungswege.

Wenn eine Systematik in der Erarbeitung der Ableitungsstrategien angestrebt wird, können zuerst Aufgaben des Typs „Kernaufgabe und noch einmal dazu“ gewählt werden, das wären die Dreimal-Aufgaben (Zweimal und noch einmal dazu) und die Sechsmal-Aufgaben (Fünfmal und noch einmal dazu). Im nächsten Schritt kann man Aufgaben des Typs „Kernaufgabe und einmal weg“ machen, das wären die Neunmal-Aufgaben (Zehnmal und einmal weg) und die Viermal-Aufgaben (Fünfmal und einmal weg). Diese Reihenfolge im Vorgehen ist nicht zwingend, sie erleichtert aber die Einsicht, dass bestimmte Zusammenhänge sogar öfter anzuwenden sind.

Bei der Besprechung von Strategien für Viermal-Aufgaben kommt hoffentlich bei den Kursteilnehmer*innen selbst die neue Idee auf, Zweimal-Aufgaben zu verdoppeln; falls nicht, kann die Kursleitung das anregen, am Beispiel $4 \cdot 7$ bedeutet das etwa, dass erst $2 \cdot 7$ gerechnet wird und das Ergebnis dann verdoppelt wird, also $2 \cdot (2 \cdot 7)$. Die Wahl der als leichter empfundenen Strategie kann dann in der Phase der Routinisierung jeder für sich treffen.

Im Praxishandbuch von Michael Gaidoschik „Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten“ 2014, Friedrich Verlag, wird die „ganzheitliche“ Erarbeitung des kleinen Einmaleins ausführlich beschrieben. Gerade Menschen, die mit dem traditionellen Reihenlernen gescheitert sind und oft dauerhaft scheitern, haben mit diesem ganzheitlichen Zugang gute Grundlagen, das Einmaleins zu verstehen und langfristig abzuspeichern. Das Buch bietet außerdem Unterrichtsmaterialien und Kopiervorlagen für eine Lernkartei, die auch zum Download zur Verfügung stehen.

13.2.7 Ableitungsstrategien erkunden und anwenden

Didaktisches Ziel
sämtliche Einmaleins-Aufgaben spielerisch und individualisiert automatisieren

EXPLORATION

Erst wenn die Kernaufgaben automatisiert sind und die Zusammenhänge zu anderen Aufgaben beschrieben und rechnerisch ermittelt werden können, ist in weiterer Folge das Automatisieren des gesamten Einmaleins sinnvoll. Ein zu rasches Voranschreiten kann hier kontraproduktiv sein, weil der Vorteil von Ableitungsstrategien nicht augenscheinlich wird, wenn inhaltliche Voraussetzungen nicht abgesichert sind.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Das unter 13.2.5 bereits beschriebene Würfelspiel eignet sich auch für die Übung und Festigung der restlichen Malaufgaben.

Die Teilnehmer*innen bilden wieder Zweiergruppen. Jede Gruppe erhält diesmal zwei Dekaeder-Würfel[8] mit den Zahlen 0 bis 9. Nun werden abwechselnd Aufgaben gewürfelt und berechnet. Entweder ist das Ergebnis bereits spontan abrufbar, oder es wird über eine Ableitungsstrategie ermittelt. Im zweiten Fall sollte der*dem Spielpartner*in nicht nur die Lösung genannt werden, sondern auch, wie diese Lösung ermittelt wurde.

Die Ergebniszahl der gewürfelten Aufgabe wird notiert. Nun würfelt die andere Person auch eine Aufgabe und löst diese. Die Person mit der höheren Ergebniszahl erhält pro Runde einen Punkt, je nach angestrebter Übungsdauer kann man als Gewinner*in festlegen, wer zuerst 10 oder auch 20 Punkte erzielt hat.

Zum gezielten und vor allem individualisierten Automatisieren hat sich die Verwendung von Lernkärtchen in einer Lernkartei bewährt. Sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins finden sich auf der **Kopiervorlage 8.** Diese kann bei Bedarf für jede*n Kursteilnehmer*in kopiert und in Kärtchen-Format geschnitten werden.

Die Kartei wird idealerweise nicht sofort mit allen Malaufgaben gefüllt, sondern nach und nach und je nach individuellem Lernfortschritt zu einer vollständigen Einmaleins-Datei ausgebaut. Wie stets bei Verwendung einer Lernkartei, sollten jene Aufgaben-Kärtchen, die bereits spontan abgerufen werden können, bei jeder erfolgreichen Wiederholung in der Kartei um ein Fach weiter nach hinten gesteckt werden. Schon früh werden sich die Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben im Fach „Spontan gewusst“ finden. Auch die Einmal- und Nullmal-Aufgaben, die hier nicht extra thematisiert wurden, sind in der Regel rasch automatisiert. Noch nicht spontan gewusste Kärtchen bleiben aber in ihrem Fach und sollten häufiger wiederholt werden.

Entscheidend ist dabei, dass auch beim automatisierenden Üben die operativen Zusammenhänge genützt werden sollten, die zuvor als Ableitungsstrategie erarbeitet wurden. Zunächst ging es darum, mit Hilfe dieser Strategien das ökonomische Ausrechnen noch nicht automatisierter Aufgaben zu ermöglichen. Beim automatisierenden Üben soll nun versucht werden, durch wiederholtes Abrufen dieser Strategien feste Gedächtnis-Assoziationen zwischen einer bereits gemerkten Aufgabe (der Kernaufgabe) und einer noch zu merkenden Aufgabe zu knüpfen. Solche Assoziationen erleichtern und beschleunigen das Speichern der noch zu merkenden Aufgabe im Langzeitgedächtnis: Zusammenhängendes wird leichter gemerkt als isolierte Einzelfakten.

Konkret heißt das: Die Kursteilnehmer*innen bekommen z. B. alle „Neunmal-Aufgaben“ (aber zunächst *nur* diese) auf Aufgabenkärtchen als *ein* Päckchen von zusammenhängenden Aufgaben vorgelegt mit dem Auftrag, diese Aufgaben regelmäßig zu trainieren. Wenn nun eine Aufgabe noch nicht aus dem Gedächtnis abgerufen werden kann, dann soll sie auf dem erarbeiteten Weg aus der zugehörigen „Zehnmal-Aufgabe“ abgeleitet werden. Die Zusammenstellung aller „Neunmal-Aufgaben“ zu einem Päckchen erleichtert dieses Ableiten insofern, als durch die oftmalige Wiederholung desselben Ableitungsweges die Chance erhöht wird, dass sich dieser Ableitungsweg einschleift, dass er also ohne große Denkanstrengung abgerufen werden kann.

Diese Form des Trainings lässt sich sehr gut in Partnerarbeit durchführen. Da es auch beim Arbeiten mit der Lernkartei nicht um reines Auswendiglernen geht, sollte das richtige Ergebnis nicht auf der Rückseite des Kärtchens notiert werden, denn so wird die Versuchung zu groß, das Kärtchen einfach umzudrehen, ohne zuvor über den Ableitungszusammenhang nachgedacht zu haben. In der Tandemarbeit kann die zweite Person die Kontrollfunktion übernehmen: Übungspartner*in 1 denkt über die Lösung und dafür eventuell auch über Ableitungsstrategien nach. Die genannte Lösung wird vom Übungspartner*in 2 dann bestätigt oder korrigiert.

Wenn Kursteilnehmer*innen nur vereinzelte Lücken im kleinen Einmaleins haben, kann man genau jene Aufgaben, die Schwierigkeiten bereiten, auf leere Karteikärtchen schreiben (ohne Ergebnis) und diese dann zum Wiederholen von Ableitungswegen und damit zum Abspeichern der Ergebnisse mitgeben.

Sollten sich in der Gruppe Kursteilnehmer*innen befinden, die das kleine Einmaleins bereits gut automatisiert haben, bietet eine Übertragung der besprochenen Ableitungsstrategien auf das große Einmaleins eine gute Möglichkeit zum Differenzieren. Als Anstoß kann die Frage genügen, wie man 13 · 5 im Kopf berechnen könnte. Wenn keine tauglichen Lösungsvorschläge kommen, kann die Kursleitung den Ableitungsweg aufzeigen: zuerst 10 · 5 und dann noch 3 · 5 dazu, also 50 + 15 = 65. Da das erste Teilergebnis immer eine reine Zehnerzahl ist, stellt das Addieren der beiden Teilergebnisse kaum rechnerische Schwierigkeiten dar. Das Thematisieren des großen Einmaleins ist für leistungsstärkere Gruppen unter alltagspraktischen Gesichtspunkten sicher lohnend.

ENDNOTEN

1 Wenn der*die Teilnehmer*in z. B. immer den Weg 5 · 8 + 3 · 8 wählt, könnte eine andere Aufgabe vorgegeben werden. Mit einem umfassenden Operationsverstandnis kann man auf Nachfrage auch von 10 · 8 auf 8 · 8 schließen.

2 Die Kursleitung beachtet, dass auf diese Frage mit der Gesamt- oder den Teilmengen geantwortet werden kann. Bei der Aufgabe 4 · 3 Würfel könnten die Teilnehmer*innen sagen, man hätte 12 Würfel gebracht. Oder sie schauen auf die Teilhandlungen und äußern, die Lehrkraft hätte immer drei gebracht. Die Kursleitung muss die Unterschiede mit den Teilnehmer*innen herausarbeiten: Habe ich 12 oder 3 Würfel gebracht? Warum kann beides richtig sein?

3 Die Kursleitung beachtet, dass es keineswegs sachlich zwingend ist, dass der zweite Faktor die vervielfachte Zahl angibt und der erste Faktor angibt, wie oft vervielfacht wird. Es handelt sich lediglich um eine kulturelle Konvention. Wir wissen, dass es Kulturkreise gibt, in denen die Konvention andersherum ist.

4 Die aktuelle Version von Kapitel 13 behandelt Ableitungsstrategien für das gesamte Einmaleins nur knapp. Es liegen ausführliche Unterrichtskonzepte zur Herleitung und Automatisation von Zehnmal-, Zweimal- und Fünfmal-Aufgaben vor, sowie eine kurzgefasste Beschreibung der weiteren Vorgehensweise.

5 Ein Hunderterfeld befindet sich in der Kopiervorlage 7. Dieses wird so laminiert, dass mit einem Folienstift immer wieder neue Mal-Aufgaben eingezeichnet werden können.

6 Reihe wurde hier bewusst kursiv gesetzt, da in diesem Kurs eben keine Reihen auswendig gelernt werden sollen, sondern Kompetenzen zum Ab- und Herleiten der Aufgaben des Einmaleins erworben werden. Gerade die „Fünferreihe“ wird oft auswendig gewusst. Und trotzdem sollen die Teilnehmer*innen des Kurses lernen, Fünfmal-Aufgaben herzuleiten.

7 Wir haben kein Kriterium, um zu entscheiden, ob diese Konstellation mit 9 · 10 oder mit 10 · 9 bezeichnet werden soll. Die Argumentation funktioniert mit beiden Sprechweisen, man muss die einmal gewählte Sprechweise aber konsequent weiter verwenden.

8 zehnflächige Würfel mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet