



5.1 Gesamtes und Teile

EXPLORATION

Es wird geklärt, dass unter dem Begriff *Gesamtmenge* etwas Gesamtes/Umfassendes verstanden wird. Von dem *Gesamten* können ein Teil oder mehrere Teile entnommen werden. Die Teile können wiederum zum Gesamten zusammengefügt werden. Dabei darf allerdings nichts verloren gehen. Sonst ergibt es nicht mehr das Gesamte, das ursprünglich in Teile zerlegt wurde.

In einer Menge von beispielsweise acht Äpfeln ist die Anzahl/die Gesamtheit/das Gesamte acht. Dafür steht die Zahl 8. Diese Menge von insgesamt acht Äpfeln kann unterschiedlich aufgeteilt werden. Zum Beispiel in die Teilmenge von drei Äpfeln und in die Teilmenge von fünf Äpfeln. Es wäre auch möglich, in die Teilmengen von sechs und zwei Äpfeln aufzuteilen. Oder in drei Teilmengen von jeweils zwei und zwei sowie vier Äpfeln.

Wenn die Teilmengen wieder zusammengefügt werden, liegt erneut die Gesamtmenge vor.

Wie ist es, wenn dieser Zusammenhang auf Zahlen übertragen wird? Gibt es hier auch Gesamtes und Teile? Die Teilnehmer*innen lernen, einerseits von Mengen auf Zahlen zu schließen. Ebenso wie bei der Mengenbetrachtung der acht Äpfel, kann die Zahl Acht in die Drei und die Fünf zerlegt werden. Oder auch in die Sechs und die Zwei. Oder sogar in zwei Zweien und die Vier. Andererseits lernen die Teilnehmer*innen aus dem Zusammendenken von Einern oder Einsen auf die Teile der Zahlen zu schließen.

Bei Zahlen wird von Zahlzerlegungen gesprochen. Eine Zahl wird in Teile zerlegt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Zahlen zu zerlegen. Der Null kommt dabei eine besondere Rolle zu. Auch die Null kann als Teil einer Zahl betrachtet werden.

5.1.1 Vortrag – Gesamtes und Teile auf Zahlen übertragen

Didaktisches Ziel

Einsichten in die wesentlichen Zusammenhänge vom Gesamten und seinen Teilen gewinnen (z. B.: Die Teile können unterschiedlich groß oder gleich groß sein. Werden die Teile zusammengefügt, ergibt sich wieder das Gesamte. Wird vom Gesamten ein Teil weggenommen, bleibt der andere Teil/bleiben andere Teile übrig. Ist eine Teilmenge leer, also Null, entspricht die andere Teilmenge dem Gesamten.)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung erläutert, dass es in diesem Unterrichtsteil darum geht, die Formulierungen *Gesamtes* und *Teile* auf Zahlen zu übertragen.

*Etwas Gesamtes ist etwas Umfassendes. Zum Beispiel die Gesamtheit aller Schüler*innen einer Schule. Wenn ich den Begriff **das Gesamte** erklären will, nutze ich bereits weitere Begriffe. Bei Erklärungen sucht man nach anderen Begriffen oder Beschreibungen.*

*Hier geht es zum Beispiel um **alle** Schüler*innen einer Schule. Das Wort **alle** beschreibt die Gesamtheit. Das heißt, ich habe jetzt für **das Gesamte** die Wörter **alle**, **Umfassendes** und **Gesamtheit** benutzt.*

*Bleiben wir bei dem Beispiel Schule. Dabei könnte man die Frage stellen: **Wie viele Schüler*innen lernen insgesamt in der Schule?** Ein weiteres Wort kommt dazu: **insgesamt**.*

*Manchmal wird auch nach der Schulgemeinschaft gefragt. Das heißt, hier benützt man das Wort **Schulgemeinschaft** für das **Gesamte**. Es interessiert zum Beispiel die Schulverwaltung, wie viele von der gesamten Schulgemeinschaft Lehrer*innen oder Schüler*innen sind.*

Zu einem Teil besteht die Schulgemeinschaft aus Schüler*innen und zu einem anderen Teil aus Lehrer*innen. Die Gesamtheit besteht aber aus noch mehr Teilen: Sekretär*innen, Hausmeister*innen, Honorarkräften, Reinigungspersonal, Küchenpersonal, etc. Für die Gesamtheit darf niemand beim Zählen vergessen werden.

Die Schulgemeinschaft kann man auch in andere Teile einteilen. Hier sind einige Beispiele:

Brillenträger*innen und Nicht-Brillenträger*innen. Klingt erstmal eindeutig – In welche Gruppe gehören aber die Kontaktlinsenträger*innen?

Fahrradfahrer*innen, Busnutzer*innen, Fußgänger*innen – Schulgemeinschaft in drei Teile eingeteilt. Was ist aber z. B. mit Skater*innen oder denjenigen, die mit dem Auto kommen?

Jahrgangsstufen – hier werden dann nur die Schüler*innen erfasst.

Die Jahrgangsstufen kann man noch genauer einteilen: Klassen – zum Beispiel: drei siebente Klassen, jeweils zwei achte, neunte und zehnte Klassen. Wie viele Teile bekommt man bei dieser Einteilung?

Bei einer Befragung für das Essen in der Schule bekommt man auch Teile der gesamten Schulgemeinschaft: Veganer*innen, Vegetarier*innen, Halal-Esser*innen, Koscher-Esser*innen, Alles-Esser*innen, Zuhause-Esser*innen, Allergiker*innen ... Und sind damit wirklich schon alle erfasst?

Einteilen ist nicht immer einfach, oft braucht es mehr Kategorien, als man vorher denkt – die Welt ist bunt und vielfältig.

Weitere Beispiele für Teile der Schulgemeinschaft könnten durch die Teilnehmer*innen aufgezählt werden:

- Volljährigkeit
- Mitarbeit in AGs
- Mehrsprachigkeit usw.

Die Kursleitung lenkt die Aufmerksamkeit der Teilnehmer*innen auf folgende Aspekte:

- Eher selten sind die einzelnen Teile gleich groß.
- Werden die Teile zusammengefügt, ergibt sich das Ganze.
- Wird der Schulgemeinschaft ein Teil entnommen, bleibt ein Teil/bleiben andere Teile übrig.

Nachfragen wie:

Stimmen diese Aussagen? Warum ist das so? Können Sie das erklären?

sollen zu einem wesentlichen Aspekt dieses Kapitels führen:

Das Gesamte besteht aus Teilen, die unterschiedlich groß sein können. Diese Teile kann man zu dem Gesamten zusammenbringen. Wenn man einen Teil von dem Gesamten wegnimmt, bleibt mindestens ein Teil übrig.

Mit der Frage, wie es sich darstellt, wenn ein bestimmter Teil in dieser Schule nicht vorhanden ist, wird bereits auf die besondere Bedeutung der Null vorbereitet.

- In einer Schule für Jungen lernen keine Mädchen. Das heißt, die Schulleitung trägt in den Fragebogen der Schulverwaltung unter „Anzahl Mädchen“ eine Null ein.
- In manchen Schulen nutzt die Schulgemeinschaft nicht den Bus. Auch hier müsste eine Null eingetragen werden.
- Manchmal entfällt eine Jahrgangsstufe.

Die Kursleitung formuliert zusammenfassend:

Ein bestimmter Teil kann also nicht vorhanden sein. Dieser Teil ist leer. Diese Teilmenge enthält keine Elemente.

5.1.2 Gruppenarbeit – Begriffe Gesamtes und Teile

Didaktisches Ziel

synonym verwendete Begriffe für das Gesamte und die Teile kennenlernen und sammeln (als Grundlage für ein Wiedererkennen des Teile-Ganzes-Prinzips in Alltagssituationen und in mathematischen Anwendungen)

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 5.1 a

Die Kursleitung verteilt an die Teilnehmer*innen Moderationskarten, auf denen Begriffe stehen, und bittet die Teilnehmer*innen, die Moderationskarten unter den Begriffen *das Gesamte* und *die Teile* zuzuordnen. Eine Druckvorlage befindet sich auf dem [Aufgabenblatt 5.1 a Begriffe Gesamtes und Teile](#) (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten).

Um die Moderationskarten zum Beispiel an den Wänden des Unterrichtsraumes zu befestigen, eignet sich Kreppband.

Möglicherweise finden die Teilnehmer*innen weitere Begriffe, die zu den beiden Oberbegriffen passen. Damit können leere Moderationskarten beschriftet werden.

Synonym verwendete Begriffe – das Ganze und die Teile:

Das Ganze

Das Gesamte
Ganzheit
Gesamtmenge
Gesamtheit
Alle/alles zusammen
Das, was da ist ...
Umfassend
100 Prozent
Vollständig
Ausnahmslos
Zusammengesetztes
Zerlegbares

Die Teile

Anteile
Teil
Teilmengen
Stücke
Bruchstücke
Ein Teil von dem ...
Nicht alles
30 Prozent, 2 Prozent
Unvollständig
Ein bisschen
Etwas

Wenn diese Begriffe für alle sichtbar im Unterrichtsraum angebracht werden, kann die Kursleitung in den nächsten Lernschritten darauf verweisen. Es können im Unterrichtsverlauf weitere passende Begriffe ergänzt werden.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

Verschiedene Begriffe können synonym für *das Gesamte* und *die Teile* verwendet werden.

5.1.3 Vortrag und Einzelarbeit – Veränderung der Teilmengen ohne Veränderung der Gesamtmenge

Didaktisches Ziel

Einsicht in das Prinzip der „Konstanz der Gesamtmenge bei gegensinnigem Verändern der Teilmengen“ gewinnen (d. h. wird ein Element von der einen Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, ändert sich die Gesamtmenge nicht)

EXPLORATION

Die Teilnehmer*innen sollten zunächst darauf aufmerksam werden, dass es bei Mengenbetrachtungen um die Anzahl der Elemente einer Menge geht und nicht um die Art der Elemente (zum Beispiel Äpfel oder Wendeplättchen).

Wie verändert sich das Gesamte, wenn die Teile verändert werden?

Hier soll folgende Erkenntnis erarbeitet werden: Wird zunächst ein Element der einen Teilmenge in die andere Teilmenge verschoben, ändert sich die Gesamtmenge nicht.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Teilnehmer*innen haben Wendeplättchen vor sich liegen.

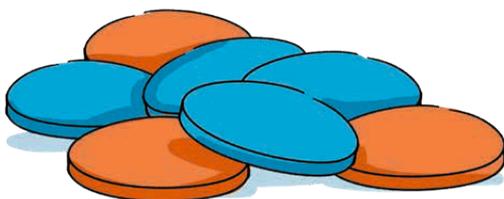


Abbildung 5.1-1 Wendeplättchen

Die Kursleitung hält einen Vortrag und zeigt die nachfolgenden Abbildungen als Overhead-Folien oder als Präsentation mit einem Beamer.³

Auf der ersten Folie sieht man Äpfel.

Eine Gesamtmenge von acht Äpfeln enthält Teilmengen von z. B. drei und fünf Äpfeln.

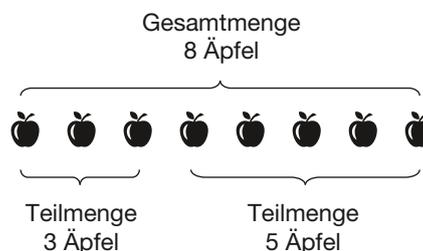


Abbildung 5.1-2 Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln

Bitte überprüfen Sie mit Wendeplättchen, ob in der Gesamtmenge von acht Wendeplättchen die Teilmenge von drei und die Teilmenge von fünf Wendeplättchen enthalten sind.

Wie können Sie das machen? Probieren Sie es aus.

Meine Lösung wäre: Acht Wendeplättchen so legen, dass Rot nach oben zeigt. Drei Wendeplättchen umdrehen. Vor mir liegen jetzt drei blaue Wendeplättchen und fünf rote Wendeplättchen. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Wendeplättchen) enthält die Teilmengen von drei Elementen (blaue Wendeplättchen) und von fünf Elementen (rote Wendeplättchen). Es ist wie in dem Bild mit den Äpfeln. Die Gesamtmenge von acht Elementen (Äpfeln) enthält die Teilmengen von drei und fünf Elementen.

Verschieben Sie ein Element von der einen Teilmenge in die andere. Die Gesamtmenge verändert sich nicht. Drehen Sie ein blaues Wendeplättchen um. Jetzt liegen vor Ihnen die Teilmengen von zwei blauen Plättchen und sechs roten Plättchen. Das heißt, Sie haben ein Plättchen der blauen Dreiermenge in die rote Fünfermenge verschoben. Es sind jetzt eine blaue Zweiermenge und eine rote Sechsermenge. Insgesamt bleiben es aber acht Elemente (Wendeplättchen).

Wenn die Kursleitung bemerkt, dass Teilnehmer*innen Schwierigkeiten haben, wenn vom Verschieben von Mengenelementen die Rede ist, aber auf der Materialebene lediglich Plättchen umgedreht werden, dann wird die gesamte Betrachtung (auch, dass 8 aus 5 und 3 oder 6 und 2 besteht) noch einmal mit Chips durchgeführt. Dabei bietet es sich an, dass die Teilmengen voneinander separiert gelegt werden. Die Teilnehmer*innen sehen, dass immer über die Gesamtmenge aus acht Elementen gesprochen wird.

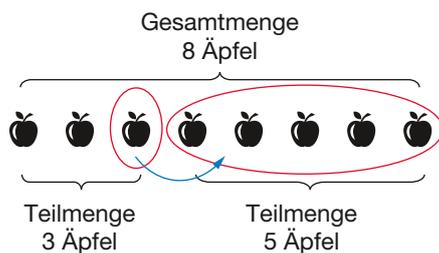


Abbildung 5.1-3 Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

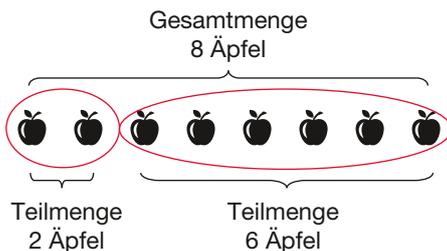


Abbildung 5.1-4 Gesamtmenge von acht Äpfeln mit Teilmengen von zwei Äpfeln und sechs Äpfeln

Jetzt sind es eine Zweier- und eine Sechser-Teilmenge. Die Gesamtmenge hat sich nicht verändert.

Die Kursleitung formuliert die Behauptung:

Verschiebt man eine beliebige Anzahl von einer Teilmenge in die andere Teilmenge, so verändert sich die Gesamtmenge nicht.

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen zu weiteren Veränderungen der Teilmengen auf:

Drehen Sie jetzt von der roten Sechser-Menge (sechs rote Wendeplättchen) fünf um! Was passiert mit den Teilmengen der roten und blauen Wendeplättchen?

Die Kursleitung beobachtet, ob alle Teilnehmer*innen diese Anweisung richtig nachvollziehen. Eine mögliche Antwort der Teilnehmer*innen könnte lauten:

Jetzt ist es eine Siebener-Teilmenge (blaue Wendeplättchen) und eine Einer-Teilmenge (rote Wendeplättchen). Zusammen sind es immer noch acht Chips.

Drehen Sie von den sieben blauen Plättchen drei Plättchen um! Was passiert, wenn Sie von der Siebener-Teilmenge drei Elemente zu der Einer-Teilmenge verschieben?

Eine mögliche Antwort könnte lauten: Jetzt sind es zwei Vierer-Teilmengen.

Bitte drehen Sie die Wendeplättchen so, dass alle eine Farbe haben. Können Sie die acht Wendeplättchen auch in mehr als zwei Teilmengen zerlegen? Und wenn ja, zeigen Sie das an einem Beispiel. Zerlegen Sie die Achter-Menge in Teilmengen.

Die Teilnehmer*innen haben jetzt im Idealfall verschiedene Teilmengen vor sich liegen:

BEISPIELE

$4/2/2, 6/1/1, 2/2/2/2, \dots, 1/1/1/1/1/1/1/1$

Bitten Sie am Ende dieser Aufgaben die Teilnehmer*innen, die Teilmengen wieder zur Gesamtmenge zusammenzuführen.

Was können Sie aus den Aufgaben herausfinden? Beschreiben Sie, wie man eine Gesamtmenge in Teilmengen zerlegen kann. Wie kann man diese Teilmengen wieder zu der Gesamtmenge zusammenbringen?

Wie viele Teilmengen kann eine Gesamtmenge haben?

Sind diese Teilmengen gleich groß?

Beschreiben Sie, wie sich die Gesamtmenge verändert, wenn man Elemente der einen Teilmenge zu der anderen Teilmenge verschiebt.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.
- Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.
Möglicherweise kommt hier bereits ein Einwand: Eine Zweier-Gesamtmenge kann nur in zwei Teilmengen zerlegt werden.

EXKURS

Es bietet sich an, an dieser Stelle die Zahl Null zu thematisieren. Wird die Teilmenge Null betrachtet, ist diese leer. Eine Mengenhandlung könnte sein, dass die Zweier-Gesamtmenge in zwei Einer-Mengen und eine (oder mehrere) weitere leere Mengen geteilt wird. Als Handlungsbeispiel könnte dienen: Zwei Bonbons werden von drei Personen geteilt. Eine Person bekommt kein Bonbon.

- Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.
- Alle Teilmengen können wieder zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

Es ist wichtig, dass alle Teilnehmer*innen die genannten Mengenhandlungen mit unterschiedlichen Elementen nachvollziehen können. Geeignet sind Steckwürfel oder andere Gegenstände. Wendepättchen haben einen visuellen Vorteil, indem durch Umdrehen sofort ersichtlich wird, welche Teilmengen (rot und blau) in der Gesamtmenge enthalten sind. Die jeweilige Aufteilung der entsprechenden Teilmenge wird farblich deutlich werden. Die Wendepättchen eignen sich besonders für das Veranschaulichen von Zerlegungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen.

Bei Übungen mit Material geht es darum, die Teilnehmer*innen auf die Zahlzerlegungen vorzubereiten, denn ihre Aufgabe wird es anschließend sein, sich selbstständig mithilfe von Wendepättchen, Steckwürfeln, Chips oder anderen Materialien die Zahlzerlegungen zu erarbeiten.

Je nach Mitarbeit und Kenntnisstand der Teilnehmer*innen entscheidet die Kursleitung, ob noch weitere Übungen durchgeführt werden.

BEISPIEL

Zehn Wendepättchen in vier rote und sechs blaue aufteilen. Von den roten Plättchen drei umdrehen. Jetzt ist die Gesamtmenge von zehn Wendepättchen in die Teilmengen neun blaue und ein rotes Wendepättchen aufgeteilt.

5.1.4 Gruppenarbeit – Gegenseitige Veränderungen der Teilmengen

Didaktisches Ziel

Einsicht in das Prinzip der Konstanz der Gesamtmenge bei gegenseitigem Verändern der Teilmengen vertiefen (durch Sammeln und Systematisieren sämtlicher Möglichkeiten, aus Gesamtmengen verschiedene Teilmengen zu bilden)

EXPLORATION

Hier geht es um das gegenseitige Verändern der Teilmengen und darum, dass die Teilnehmer*innen möglichst selbst erkennen, dass sich dabei die Gesamtmenge nicht verändert.

Gegenseitiges Verändern heißt zum Beispiel: Eine Teilmenge wird um eins weniger, dafür die andere Teilmenge um eins mehr.

Eine weitere wichtige Erkenntnis ist, dass sich bei einer Gesamtmenge von neun Elementen zehn verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung in zwei Teilmengen ergeben.

Die Kursleitung systematisiert diese Erkenntnis, indem sie die Teilnehmer*innen bittet herauszufinden, wie viele Möglichkeiten, verschiedene Teilmengen zu bilden, es bei zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht oder zehn Wendepättchen gibt.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, neun Wendeplättchen vor sich auf den Tisch zu legen. Die Oberseite der Wendeplättchen hat bei allen die gleiche Farbe.

Schritt für Schritt drehen die Teilnehmer*innen ein Wendeplättchen nach dem anderen um. Zwischen den Schritten sollten die Teilnehmer*innen den Ausführungen der Kursleitung zuhören.

Die Kursleitung zeigt die nachfolgende Abbildung und erläutert.

Vor Ihnen liegen neun Wendeplättchen einer Farbe. Das zeigt diese Abbildung mit weißen Kreisen.

Wenn man jetzt Schritt für Schritt je ein Wendeplättchen umdreht, dann ändern Ihre Wendeplättchen jeweils die Farbe.

In der Abbildung sehen Sie dafür eine Änderung der weißen Kreise in rote Kreise. Im ersten Schritt besteht die Teilmenge rot aus null Elementen. Die Teilmenge weiß besteht aus neun Elementen. Im zweiten Schritt: ein roter Kreis und acht weiße Kreise.

Im dritten Schritt: zwei rote Kreise und sieben weiße Kreise. Usw.

Die Teilmenge der weißen Kreise wird immer einer weniger. Die Teilmenge der roten Kreise wird immer einer mehr.

Bei Ihren Wendeplättchen nimmt eine Farbe um eins ab und die andere Farbe um eins zu.

Wenn man jetzt alle Schritte darstellt, dann bekommt man das Bild dieser Abbildung.

Erklären Sie bitte, welche Muster Sie entdecken und wie Sie diese Muster beschreiben können.

	Gesamtmenge 9	Teilmenge rot	Teilmenge weiß
1.		0	9
2.		1	8
3.		2	7
4.		3	6
5.		4	5
6.		5	4
7.		6	3
8.		7	2
9.		8	1
10.		9	0

Abbildung 5.1-5 Ein Element wird von der einen Teilmenge in die andere verschoben

Die nächste Abbildung fasst die Erkenntnisse der Unterrichtssequenz zusammen und wird den Teilnehmer*innen gezeigt. Dabei bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, dass jeder Satz durch eine*n Teilnehmer*in vorgelesen wird und jeweils mit einem Beispiel belegt wird.

ZUSAMMENFASSUNG

GESAMTMENGEN UND TEILMENGEN

Eine Gesamtmenge kann in verschieden große Teilmengen oder auch in gleich große Teilmengen zerlegt werden.

Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.

Eine Gesamtmenge kann in mehr als zwei Teilmengen zerlegt werden.

Die Teilmengen können zu der Gesamtmenge zusammengefügt werden.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Es gibt viele Begriffe für *das Gesamte* und *die Teile* (siehe Abschnitt 5.1.2). Sie spiegeln mit anderen Worten wider, was mit dem Gesamten und den Teilen gemeint ist. Alles wird in Einzelnes aufgeteilt.
- Das Gesamte kann in zwei und mehr Teile zerlegt werden. Die Teile müssen nicht gleich groß sein.
- Diese Teile können wieder zu dem Gesamten zusammengeführt werden. Wird die Anzahl der einen Teilmenge zugunsten/zuungunsten der anderen Teilmenge verändert, bleibt die Gesamtmenge unverändert.