



3.2 Subtraktion

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis der Subtraktion anhand von Mengenhandlungen aufbauen/ festigen (Aus einer vorhandenen Menge wird eine Teilmenge entnommen.)
- Gesetzmäßigkeiten der Subtraktion erkunden
- Mengenhandlungen versprachlichen und als Subtraktionsgleichungen anschreiben (und umgekehrt)
- Begriffe *Minuend*, *Subtrahend* und *Differenz* kennen und benutzen

EXPLORATION

Auch in der sich anschließenden Unterrichtssequenz *Mengenhandlung Subtraktion* werden die Teilnehmer*innen Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt übersetzen. Allerdings weist die Subtraktion gegenüber der Addition noch einige Besonderheiten auf. Addition und Subtraktion beschreiben unterschiedliche Mengenhandlungen. Daraus ergeben sich folgende Besonderheiten der Subtraktion im Vergleich zur Addition:

- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden.
- Bei der Subtraktion ist zu Beginn eine Menge vorhanden. Aus dieser Anfangsmenge wird ein Teil entnommen. Eine Teilmenge kann auch weggedacht werden, ohne dass sie tatsächlich der Gesamtmenge entnommen wird. Ein Beispiel wäre, wenn 10€ auf dem Tisch liegen und überlegt wird, wie viel Geld noch übrig ist, wenn gleich 3€ für den Kaffee bezahlt werden.
- Nach Abschluss der Mengenhandlung bleibt der andere Teil der Ausgangsmenge übrig.
- Es wird die Menge gesucht, die nach Entnahme der Teilmenge übrig bleibt.

Die Subtraktion zu verstehen fällt vielen Lernenden schwerer als die Addition. Ein häufiger Fehler ist, dass bei der Übersetzung einer subtraktiven Mengenhandlung in eine Gleichung die anfänglich da gewesene Menge keine Beachtung in der Gleichung findet. Dies kann sich durch diverse Fehler zeigen. Diese Fehlinterpretationen werden in dem sich an diese Exploration anschließenden Exkurs näher erläutert.

Mit dem Kursgespräch zur Subtraktion soll das dynamische Verständnis der Rechenoperation gefördert werden. Darüber hinaus dient es dazu zu erfahren, dass bei der Subtraktion im Gegensatz zur Addition aus einer Menge eine Teilmenge entnommen wird und demzufolge die andere Teilmenge übrig bleiben muss. Die Betrachtung des dynamischen Aspektes der Subtraktion vereinfacht das Lösen von Gleichungen. Nur wenn die Teilnehmer*innen wissen, was eine Subtraktionsgleichung beschreiben kann, ist die Lösung nachvollziehbar und kann von ihnen erläutert werden.

Im Gespräch sollen die grundlegenden Erkenntnisse zur Subtraktion gewonnen werden. Diese sind:

- Der Minuend (die Zahl links vom (ersten) Minuszeichen) gibt die Anfangsmenge an.
- Der Subtrahend (die Zahl rechts vom Minuszeichen) gibt an, wie viel von der Anfangsmenge – dem Minuend – weggenommen beziehungsweise weggedacht wird.
- Die Subtraktion fragt danach, wie viel nach der Entnahme einer Teilmenge übrig bleibt – fragt also nach der Differenz.
- Minuend und Subtrahend können nicht vertauscht werden, ohne dass sich die Menge, die übrig bleibt, ändert.

Bei der sich an das Kursgespräch anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer*innen schließlich die Möglichkeit, das theoretische Wissen über die Subtraktion zu erproben, zu überprüfen und eventuell aufkommende Fragen zu stellen.

EXKURS

Ein häufig auftretender Fehler bei der Übersetzung einer Mengenhandlung in eine Subtraktionsaufgabe

Aus einer Achtermenge wird eine Fünfermenge entnommen, drei bleiben übrig. Die korrekte Gleichung lautet $8 - 5 = 3$.

Die*Der Teilnehmer*in beobachtet diese Mengenhandlung und kommt zum Schluss, dass hier die Gleichung $5 - 3 = ?$ vorgespielt wurde.

Der Gedanke, dass bei $5 - 3 = ?$ zwei übrig bleiben müssten und dass diese Gleichungen deshalb nicht stimmen können, ist nicht selbstverständlich. Manchmal ist nicht klar, dass man *das Ergebnis* dann auch sehen können müsste.

Sehr oft gerät die Anfangsmenge, in diesem Falle die Acht, aus dem Blick. Es wird ausschließlich die Situation nach der Entnahme der Menge betrachtet. Im Laufe des Kursgesprächs und spätestens während der Partnerübung sollte den Teilnehmer*innen deutlich werden, dass nicht eine Situation, sondern die Handlung (dynamischer Aspekt der Subtraktion), die zu dieser Situation geführt hat, in eine Gleichung übersetzt wird. Es ist hilfreich, bei Mengenhandlungen sowohl die entnommene Menge als auch die Restmenge liegen zu lassen, denn dann ist auch die Ausgangsmenge (und somit alle drei Gleichungsglieder) noch sichtbar.

3.2.1 Kursgespräch Mengenhandlung Subtraktion

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen dazu auf zu beobachten, was sie macht. Anschließend sollen die Kursteilnehmer*innen die durchgeführte Handlung beschreiben.

Die Kursleitung vollzieht eine Mengenhandlung, die zu einer Subtraktionsgleichung passt. Beispielsweise könnten von acht Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, drei weggenommen ($8 - 3 = 5$) werden. Teilnehmer*innen könnten gebeten werden sich umzusetzen oder es könnten Gegenstände im Raum bewegt werden. Günstig bei der Wahl der Gleichung ist, dass sich Minuend, Subtrahend und Differenz unterscheiden. Das macht das anschließende Gespräch leichter, weil nicht extra benannt werden muss, beispielsweise bei $10 - 5 = 5$, welche der Fünfen denn gerade gemeint ist. Der Fokus liegt auf der Handlung und auf der Frage, die an die Endsituation der Handlung gestellt wird (Wie viele Mengenelemente liegen nach der Entfernung der Teilmenge vor?), nicht auf der bloßen Ergebnisfindung. Wichtig

ist das Sprechen über die Mengenhandlung, über Glieder und Symbole einer Subtraktionsgleichung. Die Teilnehmer*innen sollten von der Kursleitung zum Reflektieren, Beschreiben und Übersetzen der Handlung aufgefordert werden.

Nachdem die Kursleitung eine weitere subtraktive Mengenhandlung vollzogen hat, werden die Teilnehmer*innen erneut gebeten, die vorgeführte Handlung zu beschreiben.

Sollte jemand bereits vorwegnehmen, dass es sich hier um Minus, die Subtraktion oder sogar um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung, wie auch schon bei der Addition, diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer*innen fragen, woran dies erkennbar ist.

Woran hat Herr/Frau/Name ... erkannt, dass es eine Minusaufgabe sein muss?

Trotz der Vorwegnahme können die unter Punkt 2 in der nachfolgenden Kurzanleitung genannten Fragen mit den Teilnehmer*innen besprochen werden.

Auch bei der Subtraktion gilt: Wenn die Bedeutung des Gleichheitszeichens zu erläutern ist, ist es wichtig zu formulieren, dass es kein *Ergebniszeichen* ist,

sondern genau das bezeichnet, wofür es wortwörtlich steht: *ist gleich*. Auf einer Seite des Gleichheitszeichens **ist** mathematisch **gleich** viel wie auf der anderen Seite. Der auf der linken Seite versammelte Zahlenwert **ist gleich** dem auf der rechten Seite versammelten Zahlenwert. Es wird die Menge gesucht, die gleich viel ist wie die aus der Handlung entstandene Menge.

Sollte das Wissen um die Mengenhandlung, die der Subtraktion zugrunde liegt, oder über die unterschiedliche Bedeutung und Funktion von Minuend, Subtrahend und Differenz noch nicht abgesichert und von allen verstanden sein, kann die Kursleitung oder aber auch ein*e Kursteilnehmer*in weitere subtraktive Mengenhandlungen vorspielen. Auch hier bietet sich die Nutzung verschiedener Gegenstände an, um einerseits den Unterricht abwechslungsreich zu gestalten und andererseits Diskussionen bezüglich der Oberbegriffsbildung zu befördern.

BEISPIEL

Versprachlichung einer subtraktiven Mengenhandlung

$8 - 3$	$=$	5
„Wenn aus einer Achtermenge eine Dreiermenge entnommen wird, ...“	„... sind es gleich viel wie ...“	„... fünf.“

Für die Kommunikation über Subtraktionsgleichungen benötigen die Kursteilnehmer*innen die Bezeichnungen für die Teile dieser Gleichung. Sind diese Begrifflichkeiten bekannt, kann sich in den nachfolgenden Unterrichtssequenzen präziser über Subtraktionsgleichungen ausgetauscht werden.

Folgendes Tafelbild veranschaulicht den Teilnehmer*innen die Bezeichnungen der Gleichungsglieder. Für die sich direkt anschließenden Unterrichtssequenzen sollte das Tafelbild gut sichtbar im Raum platziert werden, sodass immer wieder nach den Begriffen geschaut werden kann.

BEISPIEL

Versprachlichung einer subtraktiven Mengenhandlung

5	-	3	=	2
Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz
2	=	5	-	3
Differenz	=	Minuend	-	Subtrahend

KURZANLEITUNG

- Mengenhandlung vorspielen
- Teilnehmer*innen die Mengenhandlung beschreiben lassen. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was mache ich als Erstes/Zweites/danach? Welche Menge ist zuerst da?

Was passiert dann?

Wie groß ist die Menge, die man wegnimmt? Warum ist das nicht „Plus“?

Wie viele sind dann noch übrig?

Wie viele sind es zum Schluss?

- Zur Übertragung der Mengenhandlung in eine Gleichung helfen folgende Fragen:

Wie können Sie das, was Sie beschreiben, aufschreiben?

Gibt es eine Möglichkeit, das noch kürzer zu schreiben? Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Zahlen in einer Gleichung beschreiben die Mengen, mit denen gehandelt wird,
- das Minuszeichen bedeutet, dass eine (Teil-) Menge entnommen wird,
- der Minuend steht für die am Anfang vorhandene Menge,
- der Subtrahend repräsentiert die Menge, die entnommen wird, und
- die Differenz ist jene Teilmenge, die auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens notiert ist.

3.2.2 Partnerübung Mengenhandlung Subtraktion

EXPLORATION

Mit den folgenden Aufgaben sollen alle Teilnehmer*innen Sicherheit darin gewinnen, selbst subtraktive Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen zu überführen.

Diese Aufgaben dienen der Überprüfung, ob alle Teilnehmer*innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch, eine subtraktive Mengenhandlung in eine Gleichung zu *übersetzen*, anwenden können.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Bevor auf der nachfolgenden Seite das Vorgehen bei diesen Aufgaben beschrieben wird, sei noch einmal an die drei Aspekte, die bereits in der Unterrichtssequenz zur *Partnerübung Mengenhandlung Addition* (s. Abschnitt 3.1.2) erwähnt wurden, erinnert.

Bei diesen Aufgaben ist das Übersetzen der Handlung in eine Gleichung nicht die einzige Denkleistung. Jene Teilnehmer*innen, die eine Aufgabe vorspielen sollen, erhalten dazu eine vorgegebene Gleichung. Sie müssen, um die Handlung vorspielen zu können, die genau umgekehrte Denkleistung erbringen, um die vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen zu können. Das Verständnis für die Operationslogik der Subtraktion wird vertieft bzw. erweitert.

Die Bedeutung der Null wird auch hier Gegenstand der Betrachtungen sein. Die Fantasie der Teilnehmer*innen ist gefordert, um vorzuspielen, dass nichts weggenommen wird. Spannend ist auch, ob die*der Partner*in erkennt, dass nichts weggenommen wurde. Ein Gespräch darüber, wie viel höchstens weggenommen werden kann, ist eine zusätzliche Förderung des Operationsverständnisses.

Bei zwei Gleichungen auf der Kopiervorlage ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Diese Gleichungen lassen sich nicht vorspielen. Oft bleibt der Versuch, eine solche Handlung vorzuspielen, lange in Erinnerung, sodass das Problem des kleineren Minuenden bei Subtraktionsaufgaben immer wieder schnell erkannt wird. Die Erkenntnis, dass sich eine Subtraktionsaufgabe mit größerem Subtrahenden nicht vorspielen lässt, ist wesentlich und lädt dabei gleich zum Gespräch über negative Zahlen und mögliche Situationen mit negativen Differenzen ein. Schulden zu machen wäre ein klassisches Beispiel dafür. Ich habe nur fünf Euro im Portemonnaie, der Kellner möchte aber acht Euro haben.

Da die Subtraktion häufig mit besonders vielen Fehlschlüssen behaftet ist, sollten möglichst alle Gleichungen aus der Kopiervorlage in Mengenhandlungen übersetzt und vorgespielt werden. Die Kursleitung sollte unbedingt Abwechslung ins Spiel bringen: Es können andere Tandems gebildet werden und immer andere Gegenstände zum Vorspielen genutzt werden. Es ist nicht unüblich, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich grundlegende Fehlannahmen zutage treten. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten immer unterschiedliche Aspekte der Operationslogik, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten. Eine mögliche Erweiterung wäre auch, das Zeichnen von Mengenhandlungen zuzulassen. Auch anhand von Zeichnungen können Missverständnisse und Unklarheiten analysiert werden.

Jeweils zwei Teilnehmer*innen arbeiten in einem Team. Die Kursleitung fertigt für jedes Team eine Kopie der **Kopiervorlage 2** an und schneidet die einzelnen Karten aus.

Die Karten liegen verdeckt vor den Tandems. Jede*r Teilnehmer*in nimmt eine Karte, ohne dass die*der Partner*in diese lesen kann, und überlegt sich eine passende Mengenhandlung. Anschließend wird diese vorgespielt. Ziel ist es, dass die*der Partner*in herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer*innen dazu anhalten, möglichst viele verschiedene Gegenstände zum Vorspielen zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht belohnt die Kursleitung die kreativste Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung.

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert zu beschreiben, was soeben vorgespielt wurde, bevor sie sagen, um welche Gleichung es sich vermutlich handelt. Dieses Beschreiben der Handlung erhöht die Konzentration und die Zeitspanne zum Nachdenken über Handlung und Gleichung. Häufig fallen den Teilnehmer*innen während des Beschreibens Fehler in ihrer zuerst vermuteten Gleichung auf. Es ist ausreichend, wenn die Teilnehmer*innen reflektieren, was mit den Mengen passiert und was sich geändert hat. Im zweiten Schritt wird ermittelt, um welche Gleichung es sich handelt.

BEISPIEL

zur Beschreibung einer Mengenhandlung

Erst lagen neun Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie drei und danach noch einmal zwei Büroklammern weggenommen. Jetzt sind nur noch vier Büroklammern übrig.

Die Gleichung heißt $9 - 3 - 2 = 4$.

Nach der Beschreibung der Handlung kann die*der vorspielende Teilnehmer*in entweder zustimmen oder die Mengenhandlung erneut vorspielen lassen. Wenn die Gleichung nicht korrekt ermittelt wurde, sollte noch nicht sofort aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft werden Fehler an dieser Stelle selbst entdeckt und korrigiert. Allen Lernenden sollte unbedingt die Chance gegeben werden, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. anzuschauen. In den allermeisten Fällen sind keine Erklärungen durch die Kursleitung nötig. Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner*innen ihre Rollen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Nach der Absolvierung des Kursgespräches und der Übung *Mengenhandlung Subtraktion* sollten alle Teilnehmer*innen sicher Subtraktionsgleichungen in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Subtraktionsgleichungen überführen können.
- Es sollte den Teilnehmer*innen zudem deutlich geworden sein, dass Rechenoperationen Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben können.
- Die Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, haben den Teilnehmer*innen verdeutlicht, dass es unlösbare Aufgaben bzw. Aufgaben mit negativen Differenzen geben kann.
- Auch die Erkenntnis um den Unterschied zwischen Addition und Subtraktion ist durch beide Gespräche und Aufgaben abgesichert.



Ehrenamtsportal

Einfach engagiert!

Das Online-Portal für
Ehrenamtliche in Grundbildung
und Integration

www.vhs-ehrenamtsportal.de



Foto: © Kai Löffelhan

 **AlphaDekade**
2016–2026

GEFÖRDERT VOM
 Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

ENDNOTEN

- 1 Die Gleichung $3 - 5 =$ ist lösbar, jedoch soll tendenziell in Stufe 1 im Bereich der positiven Zahlen verblieben werden. Trotzdem kann die Kursleitung mit den Teilnehmer*innen diskutieren, dass Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, lösbar sind. Sie sollten sich nicht dazu hinreißen lassen, ein n. I. (nicht lösbar) als Lösung zu notieren. Man kann sagen, dass die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Für einige Teilnehmer*innen kann es aber nur schwerlich durchschaubar sein, warum und an welchen Stellen und aus welchen Gründen manchmal ein „nicht lösbar“ erscheint, wenn es offenbar eine Lösung gibt.
- 2 Die Kursleitung achtet darauf, dass sie wirklich die gemeinte Mengenhaltung vorspielt: Wenn zwei Stifte nacheinander zu drei Stiften gelegt werden, dann wird die Aufgabe $3 + 1 + 1$ dargestellt, nicht aber die Aufgabe $3 + 2$, welche mit einer Zweiermenge – nicht mit zwei Einermengen – arbeitet. Genau an solchen unscharfen Stellen entfalten sich die Irritationen der Teilnehmer*innen.