Inhaltsverzeichnis

3 MENGEN UND ZAHLEN VERÄNDERN

(Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Mengen und Zahlen können verändert werden. Dies ist den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses bereits bekannt, denn wir lösen viele Additions- und Subtraktionsaufgaben in unserem Alltag, ohne dass es uns in jedem Moment bewusst ist. Schwierigkeiten mit dem Rechnen entstehen meist dadurch, dass die Mengen- und Zahlenebene nicht (richtig) zusammengedacht werden. Wenn unbekannt ist, dass Gleichungen in Mengenhandlungen übersetzt werden können – und umgekehrt –, wird das Addieren und Subtrahieren häufig nur als ein Hoch- und Runterzählen an einer Zahlenreihe verstanden.

Beispiel:

Die Gleichung 2 + 3 = ? beschreibt auf der Mengenebene entweder,
- dass zu einer Zweiermenge eine Dreiermenge hinzugefügt wird oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengeschoben werden oder
- dass eine Zweier- und eine Dreiermenge zusammengedacht werden.

In allen drei Fällen steht die Frage, wie viele es insgesamt sind.

Auch bei der Subtraktion gibt es eine Frage, die durch das Lösen der Aufgabe beantwortet wird: *Wie viele sind übrig?* Wenn im eben genannten Beispiel 2 + 3 = 5 von der Fünf wieder drei weggenommen werden, bleibt zwingend die Zweiermenge übrig (5 – 3 = 2). Sollte hingegen die Dreiermenge weggeschoben oder auch nur weggedacht werden, bleiben zwei übrig (5 – 3 = 2).

Beispiele für Mengenhandlungen, die in Gleichungen übersetzt werden können (und umgekehrt):

- Im Obstkorb liegen zwei Bananen, es werden noch drei Bananen dazugelegt. Jetzt sind es zusammen fünf Bananen.
  2 Bananen + 3 Bananen = 5 Bananen
- Auf dem Parkplatz stehen fünf rote und drei grüne Autos. Insgesamt stehen acht Autos auf dem Parkplatz.
  5 rote Autos + 3 grüne Autos = 8 Autos
- Im Einkaufswagen befinden sich bereits einige Artikel. Dann werden jedoch drei Artikel davon wieder in das Regal gestellt, weil das Geld nicht für alle Artikel reichen würde. Es reicht nur noch für die Butter und das Brot. Wie viele Artikel lagen vorher im Einkaufswagen?
  5 Artikel – 3 Artikel = 2 Artikel
- Mary schaut in ihren Geldbeutel. Dort ist nur noch ein Zwei-Euro-Stück. Sie weiß, dass zu Hause noch 8 € auf dem Tisch liegen. Insgesamt hat Mary 10 €.
  2 € + 8 € = 10 €

Ein weiteres Hindernis im mathematischen Lernen sind Unkenntnis bzw. ein Fehlverständnis der Operationszeichen und des Gleichheitszeichens. Wenn die Teilnehmer/-innen nicht wissen, was Plus-, Minus- und Gleichheitszeichen bedeuten, können sie entsprechende Aufgaben nicht verständig lösen. Ein großes Problem des heutigen Schulunterrichtes ist, dass Kinder bereits ab dem ersten Schuljahr mit dem Plus-, dem Minus- und dem Gleichheitszeichen konfrontiert werden, aber nur wenigen Kindern wird während ihrer Grundschulzeit erklärt, was diese Symbole genau bedeuten. Erst in der siebten Klasse, beim Umformen von Gleichungen und Termen, kommt dem Gleichheitszeichen gebührende Aufmerksamkeit zu. Nun wird besprochen, dass links und rechts dieses Zeichens gleich viel sein soll und dass es deshalb diesen Namen trägt („ist gleich“).

Ziel der nachfolgenden Stunden ist es, dass sich die Teilnehmer/-innen darin üben, Gleichungen in Mengenhandlungen und umgekehrt Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen. Gleichungen sollen für alle Kursteilnehmer/-innen nicht mehr eine bloße Ansammlung mathematischer Symbole darstellen, sondern sie werden diese Zeichen übersetzen und verstehen können.
Anschließend werden die wichtigsten Rechenregeln zur Addition und Subtraktion besprochen. Ziel ist dabei nicht, die Definition von Begriffen oder Rechenregeln auswendig zu wissen, sondern das Erkennen und Bewusstmachen von grundlegenden Gesetzmäßigkeiten.
Weiterhin notwendig ist das Wissen um Gesamt- und Teilmengen bei Addition und Subtraktion. Dieses Wissen wird zu einem späteren Zeitpunkt im Kursverlauf zur Nutzung von Zahlzerlegungen und zur Fähigkeit, Gleichungen und Ungleichungen zu lösen, ausgearbeitet. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sollte jedoch bereits in den folgenden Kapiteln bewusst werden, dass bei der Addition die Summe immer mindestens genauso groß wie oder größer als der größte Summand sein muss. Bei der Addition werden immer mindestens zwei Teilmengen zu einer Gesamtmenge zusammengefasst. Anders bei der Subtraktion. Hier wird aus der Gesamtmenge ein Teil entnommen und der andere Teil der Menge bleibt übrig. Deshalb muss bei der Subtraktion die Gesamtmenge die Menge sein, von der höchstens der gleich hohe Wert entnommen werden kann. Das Wissen um die Zusammenhänge von Gesamt- und Teilmengen hilft nicht nur beim Lösen einfacher Gleichungen, sondern wird die Teilnehmer/-innen gleichzeitig auch in die Lage versetzen, Platzhalteraufgaben zu verstehen und zu lösen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

In der Regel ist bereits bekannt, dass beim Addieren die Reihenfolge der Summanden unerheblich ist. Dies ist allerdings nicht ganz korrekt. Für das Resultat der Aufgabe $2 + 3 = ?$ ist es egal, ob $2 + 3$ oder $3 + 2$ gerechnet wird. Es sind insgesamt fünf. Für die Übersetzung einer Gleichung in eine Mengenhandlung – und umgekehrt – ist es jedoch wichtig, ob erst zwei oder erst drei da gewesen sind.

Noch größere Bedeutung erlangt die Reihenfolge der Summanden beim Lösen von Platzhalteraufgaben ($\square + 3 = 5$). Manche Erwachsene und Kinder empfinden Platzhalteraufgaben, im Vergleich zu anderen Gleichungen, als deutlich schwieriger zu lösen. Auch hier liegt die Ursache bei der mangelnden Verknüpfung von Mengen- und Zahlenebene. Wenn aber bekannt ist, dass die Gleichung $\square + 3 = 5$ beschreibt, dass zu einer Menge drei hinzugekommen sind (+ 3), es jetzt fünf sind (= 5) und sich die Frage stellt, wie viele es vorher waren, wäre die Aufgabe für viele Menschen leicht zu lösen. Kompliziert sind Platzhalteraufgaben vor allem, wenn nicht bekannt ist, dass Gleichungen Mengenhandlungen beschreiben können.

Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang, sobald bei Platzhalteraufgaben größere Zahlen im Spiel sind. Es braucht kein Auswendiglernen von Rechenregeln, wenn bekannt ist, dass bei $? + 234 = 534$ zu einer unbekannten Menge 234 hinzugefügt wurden und es dann insgesamt 534 sind. Wer die Mengenhandlung zu dieser Gleichung beschreiben kann, für den ist es weniger schwer zu erkennen, dass die Anfangsmenge gefunden werden kann, indem 234 wieder von 534 weggenommen werden.

Beispiel Platzhalteraufgaben: Zusammenhang von Addition und Subtraktion

$\mathbf{300} + 234 = 534$ denn $534 - 234 = \mathbf{300}$

Bezüglich der Subtraktion sollten die unterschiedlichen Funktionen des Minuenden (der links vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die Ausgangsmenge oder Gesamtmenge beschreibt) und des Subtrahenden (der rechts vom Minuszeichen stehenden Zahl, die die entnommene Teilmenge beschreibt) sicher erfasst worden sein. Wenn Teilnehmer/-innen bei der Gleichung $3 - 5 = \_\_$ kein Problem[1] auffällt, liegt das nicht daran, dass

[1] Die Gleichung $3 - 5 = \_\_$ ist lösbar, jedoch soll tendenziell in Stufe 1 im Bereich der positiven Zahlen verblieben werden. Trotzdem kann die Kursleitung mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern diskutieren, dass Aufgaben, bei denen der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, lösbar sind. Sie sollten sich nicht dazu hinreißen lassen, ein n. l. (nicht lösbar) als Lösung zu notieren. Man kann sagen, dass die Aufgabe im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Für einige Teilnehmer/-innen kann es aber nur schwerlich durchschaubar sein, warum und an welchen Stellen und aus welchen Gründen manchmal ein „nicht lösbar" erscheint, wenn es offenbar eine Lösung gibt.

sie nicht wissen, dass fünf mehr sind als drei. Das fehlende Problembewusstsein kann einen Hinweis darauf geben, dass der Aufbau einer Subtraktionsgleichung nicht vollends verstanden ist. Die Bedeutung und Rolle des Minuenden und des Subtrahenden müssen exakt herausgearbeitet werden, bevor thematisch weitergearbeitet werden kann.

Ein weiterer Fehlschluss kann sein, dass die Gesamtmenge bei der Addition *immer hinten* und bei der Subtraktion *immer vorne* steht. Dieser Fehlschluss sollte, wenn bei einer Teilnehmerin oder einem Teilnehmer so vorhanden, besprochen werden.

Beispiele:

Die Gesamtmenge steht bei der Addition *nicht immer hinten* und bei der Subtraktion *nicht immer vorne*.

5 = 3 + 2 **2 + 3 = 6 – 1** **4 = 6 – 2**

Wichtig ist es, bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein übertragbares Wissen um Mengenhandlungen bei Addition und Subtraktion zu schaffen, sodass sie erkennen können, welche die Gesamt- und welche die Teilmengen sind.

Das Wissen um das korrekte Vertauschen der Glieder in Additions- und Subtraktionsgleichungen sollte so sicher sein, dass die Teilnehmer/-innen nicht glauben, dass alle Zahlen beliebig vertauscht werden können. Beim Vertauschen von Zahlen in Gleichungen muss immer das Operationszeichen (Rechenzeichen) mitgedacht werden.

Beispiele für das Vertauschen von Zahlen und deren Vorzeichen in Additions- und Subtraktionsgleichungen:

$\underline{(+)\,5}\ \underline{+\,6}\ \underline{-\,3} \neq \underline{(+)\,5}\ \underline{+\,3}\ \underline{-\,6}$

Richtig wäre z. B.

$\underline{(+)\,5}\ \underline{+\,6}\ \underline{-\,3} = \underline{(+)\,6}\ \underline{+\,5}\ \underline{-\,3}$

$\underline{(+)\,5}\ \underline{+\,6}\ \underline{-\,3} = \underline{(+)\,6}\ \underline{-\,3}\ \underline{+\,5}$

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Um Veränderungen bei Zahlen und Mengen in Gleichungen überführen zu können, muss bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der kardinale Zahlbegriff vorhanden sein. Das heißt, es sollte bekannt sein, dass Zahlen die Anzahl einer Menge angeben können.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn
  > Stufe 1 – Bedeutung der Symbolisierung, S. 25 f.
  > Stufe 1 – Was ist Addieren? Was ist Subtrahieren? Wie hängen sie zusammen?, S. 26 ff.
  www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

Für die folgenden vier Unterrichtssequenzen werden für je zwei Kursteilnehmer/-innen zehn Gegenstände (beispielsweise Stifte, Kreide, Büroklammern, Besteck, Geschirr, Flaschen, Schirme o. Ä.) benötigt.