



3.1 Addition

Didaktische Ziele

- Operationsverständnis der Addition anhand von Mengenhandlungen aufbauen/festigen (Eine Menge kommt zu einer anderen Menge hinzu oder es werden zwei Mengen zusammengeschoben.)
- Gesetzmäßigkeiten der Addition erkunden
- Mengenhandlungen versprachlichen und in Additionsgleichungen übersetzen (und umgekehrt)
- Begriffe *Summand* und *Summe* kennen und benutzen

EXPLORATION

Mit dem folgenden Gespräch und der sich anschließenden Partnerübung soll bei den Teilnehmer*innen das Operationsverständnis der Addition gefördert werden. Es soll erarbeitet werden, dass bei der Addition entweder eine Menge zu einer anderen Menge hinzukommt oder dass zwei Mengen zusammengeschoben (bzw. zusammengedacht) werden können. Aus mindestens zwei Teilmengen wird eine Gesamtmenge gebildet. Dieses mengenhafte und dynamische Operationsverständnis ist Grundlage dafür, dass die Teilnehmer*innen Gleichungen verstehen können. Wenn sie wissen, was Gleichungen und die dazugehörigen Operationszeichen eigentlich beschreiben, können sie Rechenaufgaben verständlich lösen.

Das Kursgespräch *Mengenhandlung Addition* soll einerseits eine Anleitung für die nachfolgenden Aufgaben (s. Abschnitt 3.1.2) darstellen, andererseits aber auch erste Erkenntnisse bezüglich der Operationslogik hervorbringen.

Zu den wesentlichen Erkenntnissen gehört, dass das Pluszeichen immer bedeutet, dass entweder zur davorstehenden Menge eine andere Menge hinzukommt und dass diese Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden oder dass zwei Mengen zu einer Gesamtmenge vereint werden.

Während der sich anschließenden Partnerübung haben die Teilnehmer*innen dann die Möglichkeit, dieses theoretische Wissen aus dem Kursgespräch zu erproben und eventuell aufkommende Fragen zu klären. Bei den Aufgaben werden die Teilnehmer*innen

Gelegenheit erhalten, selbstständig Mengenhandlungen in Gleichungen zu übersetzen und umgekehrt.

3.1.1 Kursgespräch Mengenhandlung Addition

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung fordert die Teilnehmer*innen dazu auf, genau zu beobachten, was gleich passiert. Anschließend sollen die Teilnehmer*innen die Handlung beschreiben. Jetzt vollzieht die Kursleitung eine additive Mengenhandlung. Es könnten beispielsweise zu drei Stiften, die sich bereits auf dem Tisch befinden, noch zwei Stifte hinzugelegt werden.² Eine Variation der Mengenhandlung ist: Die Kursleitung bittet einige Teilnehmer*innen, sich zu anderen Teilnehmer*innen dazuzusetzen.

Es ist gut, eine Situation zu wählen, bei der sich die Summanden unterscheiden. So können die verschiedenen Funktionen des ersten und zweiten Summanden später leichter herausgearbeitet werden. Der Fokus dieser Aufgabe liegt auf der Handlung und nicht auf der Ergebnisfindung. Viele Teilnehmer*innen werden es gewohnt sein, nur das Ergebnis zu benennen. Um in jeder Situation verständlich rechnen zu können, kommt es aber darauf an, benennen zu können, welche Ausgangsmengen vorliegen, welche Handlung mit diesen Mengen vollzogen und welche Frage gestellt wird.

Nachdem die Kursleitung eine Mengenhandlung vor den Teilnehmer*innen vollzogen hat, werden die Teilnehmer*innen dazu aufgefordert zu beschreiben, was die Kursleitung gerade getan hat.

Sollte jemand bereits vorgreifen und äußern, dass es sich hier um *Plus* bzw. *Addition* handelt oder bereits äußern, um welche Gleichung es sich genau handelt, sollte die Kursleitung diese Idee aufgreifen und die anderen Teilnehmer*innen fragen, woran das erkannt werden könnte.

Woher wusste Herr/Frau/Name ..., dass es eine Plusaufgabe ist?

Anschließend können mit den Teilnehmer*innen trotzdem die unter Punkt 2 der Kurzanleitung genannten Fragen besprochen werden (am Ende dieser Unterrichtssequenz).

Das Gleichheitszeichen kann, aber muss an dieser Stelle des Kurses noch nicht thematisiert werden. Wenn der Gehalt des Gleichheitszeichens Thema wird, ist es wichtig, dass es nicht nur ein Ergebniszeichen ist, sondern genau das bezeichnet, was wortwörtlich abgebildet ist: ist gleich. Damit ist gemeint: Das auf der linken Seite ist mathematisch gleich dem auf der rechten Seite. Konkreter: Der auf der linken Seite versammelte Zahlenwert ist gleich dem auf der rechten Seite versammelten Zahlenwert. Konkret umgemünzt für unsere Situation: Es wird die Menge gesucht, die gleich viel ist wie die aus der Handlung entstandene Menge.

BEISPIEL

Die Begrifflichkeiten einer Additions-
gleichung

5 + 3	=	8
Summand + Summand	=	Summe

Bestehen noch sehr große Unsicherheiten im Kurs, kann die Kursleitung oder aber auch ein*e Teilnehmer*in weitere Mengenhandlungen vorspielen. Dabei sollten immer wieder verschiedene Gegenstände genutzt werden, weil so deutlich wird, dass Zahlen verschiedenste Mengen repräsentieren können. Das Thema Oberbegriffe kann an diesem Punkt auch wieder auftauchen. Wenn sich die Kursleitung beispielsweise zu zwei Taschen setzt. Dann sind es zusammen drei ...?

BEISPIEL

zur Versprachlichung einer additiven
Mengenhandlung

2 + 3	=	5
„Wenn zu einer Zweiermenge drei hinzu kommen, ...“	„... sind es gleich viel wie ...“	„... fünf.“

Wenn nun detaillierter über Gleichungen gesprochen werden soll, benötigen die Teilnehmer*innen zur Kommunikation auch die Bezeichnungen der Glieder einer Additions Gleichung. Die Kursleitung bespricht dazu folgendes Tafelbild mit den Teilnehmer*innen. Das Tafelbild sollte auch für die darauf folgenden Unterrichtssequenzen gut sichtbar im Raum platziert werden. Ziel ist es, sich mithilfe der Begrifflichkeiten ohne Missverständnisse über Gleichungen austauschen zu können. Die Teilnehmer*innen müssen die Begriffe nicht auswendig lernen, denn sie haben keine Praxisrelevanz.

KURZANLEITUNG

- Mengenhandlung vorspielen
- Teilnehmer*innen beschreiben lassen, was die Kursleitung gerade getan hat. Folgende Fragen sollen den Erkenntnisprozess fördern:

Was habe ich als Erstes/Zweites/danach getan?
Hat das etwas mit Mathematik zu tun? Was hat das mit Mathematik zu tun?
Was war an dieser Handlung Mathematik/mathematisch?
Welche Menge ist zuerst da gewesen?
Welche Menge ist hinzugekommen?
Wie viele waren es dann?
Wie viele sind es zum Schluss gewesen?

- Nun wird die Mengenhandlung in eine Gleichung überführt. Dabei helfen folgende Fragen:

Wie kann man das, was Sie eben beschrieben haben, kurz aufschreiben?
Gibt es eine Möglichkeit, das noch kürzer aufzuschreiben?
Kennen Sie Zeichen und Symbole, die das Gleiche bedeuten/aussagen?

Am Ende der Aufgabe sollte eine Gleichung stehen, die genau das beschreibt, was die Kursleitung zu Beginn der Stunde vorgespielt hat.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für eine Addition braucht es mindestens zwei Teilmengen.
- Entweder gibt der erste Summand die Menge an, zu der eine zweite Menge (2. Summand) hinzukommt oder beide Summanden geben die Mengen an, die zusammengefügt oder auch nur zusammengedacht werden.

3.1.2 Partnerübung Mengenhandlung Addition

EXPLORATION

Die folgenden Aufgaben dienen dazu, alle Teilnehmer*innen Sicherheit darin gewinnen zu lassen, Mengenhandlungen in Gleichungen zu überführen und umgekehrt. Dazu erhalten die Teilnehmer*innen kopierte Karten mit verschiedenen Additionsgleichungen. Gleichungen können in Mengenhandlungen übersetzt werden (und umgekehrt). Diese werden die Teilnehmer*innen in eine Mengenhandlung übersetzen und sich gegenseitig vorspielen. Durch das Erkennen von Zusammenhängen zwischen Gleichung und Mengenhandlung sollen Gleichungen für die Teilnehmer*innen keine unlösbaren und unverständlichen Ansammlungen von Zeichen und Ziffern mehr sein. Mengenhandlungen sollen in einer abstrakten Form – der Gleichung – notiert werden. Dabei soll sich der Mehrwert durch die Nutzung von Gleichungen bzw. Rechenaufgaben für die Teilnehmer*innen erschließen.

Die Kursleitung hat während der Durchführung die Möglichkeit, herauszufinden, ob wirklich alle Teilnehmer*innen das theoretische Wissen aus dem Kursgespräch aufgenommen haben und sicher im Überführen von Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt sind.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Vier wichtige Aspekte sollen im Rahmen der Aufgaben herausgearbeitet werden:

- 1 Diejenigen Teilnehmer*innen, die eine Aufgabe vorspielen, erhalten dazu eine Gleichung. Sie müssen, um eine Handlung vorspielen zu können, eine vorgegebene Gleichung in eine Mengenhandlung überführen.

Gleichung → Mengenhandlung

Die*Der Partner*in erbringt die entgegengesetzte Denkleistung und übersetzt die Mengenhandlung in eine Gleichung.

Mengenhandlung → Gleichung

Dieser doppelte Blick auf Mengenhandlungen und Gleichungen vertieft das Verständnis für die Operationslogik weiter.

- 2 Zwei der vorgegebenen Gleichungen enthalten eine Null. Bei diesen Aufgaben wird erstmals die Rolle der Null in Gleichungen thematisiert. Die Kursleitung beobachtet, wie die Teilnehmer*innen

Mengenhandlungen vorspielen, bei denen entweder zu einer Menge nichts hinzukommt oder zu einer leeren Menge eine andere Menge hinzugefügt wird.

- 3 Einige Gleichungen enthalten einen Tausch der Summanden. Bei der Beschäftigung mit der Dynamik einer Rechenoperation ist es wesentlich, welche Menge zuerst da gewesen ist (1. Summand) und welche Menge zu dieser Anfangsmenge hinzukommt (2. Summand). Wird die Mengenhandlung in der Art, dass zwei Mengen gleichwertig zusammengeführt werden, vorgespielt, unterscheidet sich die Rolle des ersten Summanden nicht von der Rolle des zweiten Summanden. In beiden Fällen wird deutlich, dass die Summe bei identischen Summanden gleich bleibt.
- 4 Abwechslung kann durch einen Tausch der Partner*innen nach jeder Gleichung oder dadurch erreicht werden, dass andere Materialien zum Vorspielen der Mengenhandlung verwendet werden. Es ist wichtig, dass die Teilnehmer*innen viele Mengenhandlungen vorspielen und in Gleichungen übersetzen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass nach dem korrekten Vorspielen von zwei oder drei Gleichungen plötzlich auch noch grundlegende Fehlannahmen bei jemandem zutage treten können. Alle Gleichungen auf der Kopiervorlage enthalten unterschiedliche Aspekte, die erst nacheinander in verschiedenen Gleichungen thematisiert werden können und sollten.

Die Kursleitung fertigt für jede Gruppe à zwei Teilnehmer*innen eine Kopie der **Kopiervorlage 1** an und schneidet die abgebildeten Karten aus.

KOPIERVORLAGE 1

Die Karten sollten zu Beginn verdeckt vor den Tandems abgelegt werden. Nun nimmt Person A verdeckt einen Gleichungszettel, ohne dass Person B diesen lesen kann. Person A überlegt sich eine passende Mengenhandlung und spielt diese B vor. Ziel ist es, dass B herausfindet, welche Gleichung zur vorgespielten Mengenhandlung passt. Die Kursleitung kann die Teilnehmer*innen dazu anhalten, nach jeder Gleichung andere Materialien zu verwenden. Mögliche Materialien für die Handlung wären: Stifte, Flaschen, Büroklammern, Taschentücher, Steckwürfel, Besteck, Mobiltelefone, Kreide oder Tafelstifte. Vielleicht verlost die Kursleitung auch einen Schokoriegel für die schönste, lustigste oder kreativste Mengenhandlung. Die Nutzung diverser Materialien wird interessante Fragen bezüglich der Oberbegriffsbildung aufwerfen. Die Teilnehmer*innen werden überlegen, ob sie zum Vorspielen einer Gleichung auch unterschiedliche Dinge zusammenrechnen können, z. B. ein Telefon und einen Bleistift.

Als Zwischenschritt sollten die Teilnehmer*innen, die sich die Handlung angeschaut haben, immer zuerst die soeben vorgespielte Handlung beschreiben. Dadurch erhöht sich die Konzentration und die Teilnehmer*innen können länger und intensiver über den Inhalt der vorgespielten Mengenhandlung nachdenken. Es sollte erzählt werden, welche Mengen eine Rolle spielten, was mit diesen Mengen passierte und welche Situation nach der Mengenhandlung vorliegt. Erst dann sollte gesagt werden, um welche Gleichung es sich handelt.

BEISPIEL

für die Beschreibung einer Mengenhandlung

Erst lagen 2 Büroklammern auf dem Tisch. Dann haben Sie vier und noch einmal drei Büroklammern dazugelegt. Jetzt liegen hier insgesamt neun Büroklammern.

Die Gleichung heißt $2 + 4 + 3 = 9$.

Die Kursleitung beobachtet, ob bei manchen Teilnehmer*innen interessante Fehlvorstellungen bezüglich der Operationslogik der Addition vorhanden sind. Diese können aufgegriffen und anschließend im Plenum diskutiert werden.

Eine Besonderheit kommt häufig bei Menschen vor, die alle Aufgaben auszählen (müssen): Dies kann dadurch offenbar werden, dass die*der Teilnehmer*in alle Mengenhandlungen ausschließlich in Einerschritten vollzieht.

Ein Beispiel: Es soll die Gleichung $2 + 4 + 3 = 9$ in eine Mengenhandlung übersetzt werden. Anstatt aber zu den zwei Büroklammern erst vier und dann noch einmal drei Büroklammern zu legen, werden alle Klammern einzeln zur Zweiermenge gelegt. Dies hat zur Folge, dass die*der Partner*in nicht weiß, welche Aufgabe vorgespielt wurde. Sollte ein*e Teilnehmer*in nur in Einerschritten handeln, greifen Sie dies auf. Die Kursleitung könnte fragen:

Welche Gleichung passt zu dieser Handlung?

Die Gleichung, die zu einer solchen Handlung passt, lautet

$$2 + (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 9.$$

Nach der Beschreibung der Handlung kann die*der vorspielende Teilnehmer*in entweder zustimmen oder die Mengenhandlung erneut vorspielen. Wenn die Gleichung nicht korrekt erfasst wird, sollte noch nicht aufgelöst werden, um welche Gleichung es sich handelt. Oft fällt den Teilnehmer*innen an diesem Punkt bereits selbst der Fehler auf und sie korrigieren ihn. Deshalb gibt die Kursleitung allen die Chance, die Handlung – wenn nötig – auch mehrfach vorzuspielen bzw. sich vorspielen zu lassen. In den allermeisten Fällen kommen die Teilnehmer*innen schließlich zur richtigen Lösung, ohne dass Erklärungen von außen nötig sind.

Sobald die erste Gleichung richtig benannt wurde, tauschen die Partner*innen ihre Rollen. Es wird eine neue Gleichungskarte gezogen und diese Gleichung mit einer Mengenhandlung dargestellt.

Eine Variation der Aufgabe wäre es, die Gleichungen mithilfe von Rechengeschichten zu beschreiben. Die anderen sind anschließend aufgefordert, die entsprechende Gleichung zu benennen.

BEISPIELE

für Rechengeschichten zur Aufgabe

$$2 + 4 + 3 = 9$$

- Auf einer Regenrinne sitzen zwei Spatzen. Nach ein paar Minuten setzen sich noch vier Spatzen dazu. Kurz darauf kommt eine Dreiergruppe Spatzen und setzt sich auch noch auf die Regenrinne.
- Anna arbeitet viel. Erst arbeitet sie zwei Stunden an einem wichtigen Brief. Dann holt sie sich einen Kaffee und setzt sich wieder an ihren Arbeitsplatz. Dort bleibt sie auch für weitere vier Stunden sitzen. Nach einer Mittagspause arbeitet sie noch einmal drei Stunden, bevor sie nach Hause geht.
- René sucht Zahnstocher. Er findet im Schubfach zwei, im Hängeschränk vier und drei weitere Zahnstocher im Regal bei den Tassen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Additionsgleichungen können in Mengenhandlungen und Mengenhandlungen in Additionsgleichungen überführt werden.
- Zudem sollte deutlich geworden sein, dass die Addition Veränderungen von Mengen und Zahlen beschreiben kann. Die Aufgaben, bei denen nur die Summanden vertauscht wurden, die Gesamtmenge aber gleich blieb, sind dazu geeignet, den Teilnehmer*innen den Unterschied zwischen erstem und zweitem Summanden zu verdeutlichen.