13.1 Die Operationslogik der Multiplikation

EXPLORATION

Das nachfolgende Kursgespräch und die Partnerarbeit sollen die Teilnehmer*innen in die Lage versetzen, Mal-Aufgaben in Mengenhandlungen zu übersetzen. Es wird deutlich, dass bei einer multiplikativen Mengenhandlung eine Menge mehrfach vorhanden ist – die Menge wird vervielfacht. An der Mengenhandlung wird weiteres Wissen um die Operationslogik der Multiplikation verdeutlicht:

- Welche Frage beantworten Multiplikationsaufgaben?
- Welche Gleichungen passen zur vorgespielten Handlung?
- Welche Plus- und welche Mal-Aufgaben passen zur Handlung?
- Welche unterschiedliche Bedeutung haben der erste und der zweite Faktor?
- Wie wirkt sich ein Tausch der Faktoren auf die Mengenhandlung aus?

Ähnlich wie bei der Addition und Subtraktion soll das Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* einerseits der Vorbereitung der sich anschließenden Partnerübung dienen, andererseits auch grundlegende Einsichten bezüglich der Operationslogik der Multiplikation hervorbringen. Diese werden dann während der nachfolgenden Übung vertieft. Während der Übung hat die Kursleitung die Möglichkeit zu überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen die wichtigen Erkenntnisschritte mitgegangen und somit für die nächsten Erkenntnisschritte, zum Herleiten und Automatisieren des kleinen Einmaleins bereit sind.

13.1.1 Kursgespräch – Mengenhandlung Multiplikation

Didaktische Ziele

- Durch aktives Darstellen von Multiplikationsaufgaben (handelnd, bildlich und symbolisch) Verständnis für die Rechenoperation Multiplikation aufbauen/festigen
- Zeitlich-sukzessive und räumlich-simultane Vorstellungen zur Multiplikation aufbauen/festigen
- Die Fachbegriffe der Multiplikation (Faktor und Produkt) kennen und richtig benutzen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

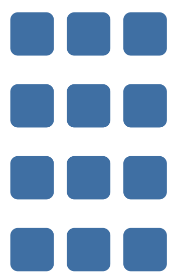
Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, genau zu beobachten, was passiert, sodass sie anschließend beschreiben können, was die Kursleitung getan hat.

Die Kursleitung spielt eine multiplikative Mengenhandlung vor. Dazu können Steckwürfel oder auch andere Gegenstände verwendet werden. Es sind ausreichend große Pausen zwischen den einzelnen Handlungsschritten nötig, damit die Teilnehmer*innen Zeit haben zu erkennen, um welche Menge es bei der Aufgabe gehen soll.

BEISPIEL
für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung:

Die Kursleitung holt drei Steckwürfel aus einem Schrank und legt diese Würfel auf einen Tisch. Dann geht die Kursleitung erneut zum Schrank und holt noch einmal drei Steckwürfel. Das Ganze soll noch zweimal wiederholt werden.

Nun ist die Kursleitung viermal gelaufen und hat jeweils drei Steckwürfel geholt.



Die Teilnehmer*innen beschreiben nun, was sie beobachtet haben. Folgende Fragen sind hilfreich, um die dazugehörigen Additions- und Multiplikationsgleichungen zu finden:

Was habe ich (genau) getan? Und was habe ich danach gemacht?

Welche Frage könnten wir uns jetzt stellen? Wie viele Gegenstände habe ich gebracht?[2]

Wie viele Gegenstände habe ich jedes Mal gebracht?

Wie viele Gegenstände habe ich insgesamt auf den Tisch gelegt?

Welche Gleichung passt zu dieser Aufgabe?

Wenn sofort die Mal-Aufgabe ($4 \cdot 3$ oder $3 \cdot 4$) genannt wird, hilft folgende Frage, um die Operationslogik herauszuarbeiten.

Wie viele Gegenstände sind es insgesamt? Wie haben Sie das gerechnet?

Eine häufige Antwort ist: „Drei plus drei plus drei und noch einmal drei. Das sind dann zwölf."

Wenn die Teilnehmer*innen keine passende Additions- oder Multiplikationsaufgabe nennen, fragt die Kursleitung direkt, welche Plus-Aufgabe zu den Handlungen passt. Bei der Suche nach der Mal-Aufgabe hilft oft die folgende Frage.

Wie kann man diese Plus-Aufgabe kürzer aufschreiben? Wie kann ich leichter rechnen?

Wenn die passende Gleichung gefunden wurde, kann die Kursleitung gemeinsam mit den Teilnehmer*innen überlegen, *warum* sie das eigentlich zusammengerechnet haben. Welche Frage stellt sich nun?

Warum haben Sie das zusammengerechnet? Was erfahren wir, wenn wir die Aufgabe ausrechnen?

Was wissen wir durch das Ergebnis Neues? Was hat uns das Lösen der Aufgabe gebracht? Welche Frage kann man an diese Aufgabe stellen?

Welche Frage ergibt sich aus der Gleichung?

An dieser Stelle können noch keine verallgemeinernden Rückschlüsse (in der Art: „Die Multiplikation fragt immer nach …") erwartet werden bzw. die Kursleitung sollte an diesem Punkt noch nicht die Erkenntnisse zusammenfassen. Den Teilnehmer*innen wird ausreichend Zeit gegeben, um wiederkehrende Zusammenhänge selbst zu entdecken.

Die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren

Ist nun deutlich geworden, welche Frage durch die Berechnung der Aufgabe beantwortet wird und welche Plus- und Mal-Aufgabe zur vorgespielten Gleichung passen, können sich die Teilnehmer*innen der unterschiedlichen Bedeutung der Faktoren widmen.[3]

Dazu zurück zur Beispielaufgabe $4 \cdot 3$ Steckwürfel = 12 Steckwürfel.

Die Kursleitung erinnert die Teilnehmer*innen an die passende Multiplikationsaufgabe. Dazu wird die Aufgabe an die Tafel geschrieben. Hilfreich ist auch eine Visualisierung der Mengenhandlung – eine Rechenskizze – ähnlich der Abbildung zum Beispiel für das Vorspielen einer multiplikativen Mengenhandlung.

EXKURS FACHTERMINI

Es bietet sich weiter an, mit den Teilnehmer*innen ein Tafelbild über die Fachtermini bezüglich einer Multiplikationsgleichung anzufertigen.
Es ist für das Rechnen nicht entscheidend, ob diese Fachworte bekannt sind. Für Teilnehmer*innen ist es aber von Vorteil immer genau zu wissen, über welchen Teil der Mal-Aufgabe gerade gesprochen wird.

Rechenoperation: **Multiplikation**

Verb: **multiplizieren**

$$\underset{\uparrow \atop \text{1. Faktor}}{\text{Faktor}} \cdot \underset{\uparrow \atop \text{2. Faktor}}{\text{Faktor}} = \text{Produkt}$$

Folgende Fragen helfen beim Herausstellen der unterschiedlichen Bedeutung der beiden Faktoren (hier am Beispiel der Aufgabe 4 · 3 Steckwürfel = 12 Steckwürfel).

Was sagt uns der erste Faktor? Wofür steht der erste Faktor?

Wo ist die Vier bei den Würfeln? Kann man die Vier/eine Vierermenge sehen?

Was sagt der zweite Faktor? Wofür steht der zweite Faktor?

Welche Rolle spielte die Drei bei der vorgezeigten Handlung mit den Steckwürfeln?

Auswirkung eines Faktorentausches auf die Mengenhandlung

Ist die Erkenntnis gesichert, dass der erste Faktor angibt, wie oft die zweite Zahl da ist, werden die Teilnehmer*innen gefragt, welche Auswirkungen ein Tausch des ersten und des zweiten Faktors zur Folge hat.

Wie muss man die Handlung verändern, wenn die Aufgabe 3 · 4 Steckwürfel lautet? Wie oft müssen wir laufen (um neue Gegenstände zu holen)?

Wie viel muss man bei jedem Mal mitbringen?

Was ändert sich zur Handlung vorher? Und was bleibt gleich?

Hat die Kursleitung den Eindruck, dass jemand schon eine gute Idee hat, kann diese*r gebeten werden, die veränderte Handlung vorzuspielen. Besonders gewinnbringend ist es, wenn aus den Fragen eine Diskussion entsteht, in der sich alle Teilnehmer*innen trauen, ihre Ideen und Vermutungen zu äußern. Werden *falsche* Lösungsideen durch die Kursleitung aufgegriffen, kann z. B. über folgende Aspekte diskutiert werden:

- die Folgen des Faktorentausches,
- die Folgen der Änderung des ersten oder zweiten Faktors.

Die Konsequenzen der falschen Lösung können gemeinsam mit allen Teilnehmer*innen nachvollzogen werden. Damit fühlen sich auch Teilnehmer*innen mit der falschen Lösung wertgeschätzt und gleichzeitig entsteht für alle ein gewinnbringender Austausch über die mathematischen Zusammenhänge.

13.1.2 Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

KOPIERVORLAGEN 1–3

Jeweils zwei Teilnehmer*innen erhalten einen Satz der kopierten (und ausgeschnittenen) **Kopiervorlage 1**. Die Gleichungszettel werden vor dem Team auf den Tisch gelegt. Eine Person zieht einen Gleichungszettel und spielt die darauf notierte Gleichung vor. Anschließend beantwortet die andere Person die Fragen auf den **Kopiervorlagen 2 und 3**.

Den Teilnehmer*innen sollte 30 Minuten Zeit zum gegenseitigen Vorspielen der Aufgaben und zum parallelen Beantworten der Fragen des Aufgabenblattes gegeben werden. Die Kursleitung schaut kurz vor Ablauf der Zeit, ob von den Teilnehmer*innen noch mehr Zeit benötigt wird.

Die Zweierteams sollen sich abwechseln, sodass am Ende der Aufgabe jede*r Teilnehmer*in vier Aufgaben vorgespielt und vier Aufgaben angeschaut hat. Die Kursleitung geht während der Übung von Team zu Team und schaut, ob es noch Teilnehmer*innen gibt, die Probleme mit der Aufgabenstellung oder mathematische Verständnisschwierigkeiten haben. Die Kursleitung kann sich dort einbringen, wo es Probleme gibt und entsprechende Fragen stellen, die den Teilnehmer*innen bei der Lösung der Aufgabe helfen. Die nachfolgend aufgelisteten Fragen müssen an das Verständnisproblem der Teilnehmer*innen angepasst werden.

Fragen zur Unterstützung bei Verständnisproblemen

Bei allgemeinen Verständnisproblemen:

Was hat die andere Person eben getan?

*Versuchen Sie so genau wie möglich zu beschreiben, was Ihr*e Partner*in eben getan hat.*

Bei Problemen mit 1. und 2. Faktor:

Wie oft wurde etwas geholt/getan?

Wie viele Gruppen von Steckwürfeln liegen da? Wie viele Steckwürfelstangen liegen da?

Wie viele Gegenstände hat die Person jedes Mal geholt?

Aus wie vielen Steckwürfel besteht eine Steckwürfelstange? Wie viele Steckwürfel sind immer zu einer Gruppe zusammengesteckt?

Bei Problemen bezüglich der Gesamtmenge bzw. der Lösungsfindung:

Wie viele Gegenstände hat die Person insgesamt geholt?

Wie viele Gegenstände sind jetzt insgesamt da?

Die Kursleitung macht von folgenden Faktoren abhängig, ob im Anschluss noch ein Auswertungsgespräch durchgeführt wird:

- Können alle Teilnehmer*innen die Gleichungen richtig vorspielen?
- Können alle Teilnehmer*innen die Fragen auf den Aufgabenblättern richtig beantworten?
- Haben alle Teilnehmer*innen den Unterschied zwischen der Funktion des ersten und des zweiten Faktors verstanden?
- Können die Teilnehmer*innen Fragen zu den multiplikativen Mengenhandlungen entwickeln?
- Finden die Teilnehmer*innen nicht nur die entsprechende Mal-, sondern auch die passende Plus-Aufgabe zur Handlung?

Wenn ja, kann mit dem Kurs zu den sich anschließenden Unterrichtssequenzen *Einzelarbeit – Rechenskizzen, Gesamt-/Teilmenge und Funktion der Faktoren* übergegangen werden. Sollte es nur leichte Unsicherheiten bei einzelnen Personen geben, kann dennoch inhaltlich vorangegangen und die sich anschließenden Aufgabenblätter können bearbeitet werden. Die Kursleitung sollte sich jedoch in besonderer Weise den inhaltlich noch unsicheren Teilnehmer*innen widmen. Sie unterstützt durch die oben stehenden Fragen die Teilnehmer*innen bei Verständnisproblemen.

Sollte es jedoch mehrheitlich große Verständnisprobleme bezüglich der Multiplikation geben, ist das Vorspielen/Legen weiterer multiplikativer Handlungen sinnvoll. Die Kursleitung unterstützt die Teilnehmer*innen durch entsprechende Fragestellungen, die richtigen und elementaren Einsichten zu erhalten.

KOPIERVORLAGEN 4–5

Es können auch die **Kopiervorlagen 4 und 5** genutzt und damit weitere Multiplikationsgleichungen von den Teilnehmer*innen bearbeitet werden.

Mit jedem Schritt werden die Teilnehmer*innen zunehmend selbstständiger ihr Wissen um die Multiplikation anwenden. Zeigen einzelne Teilnehmer*innen noch immer Unsicherheiten bezüglich der Operationslogik, geht die Kursleitung mit ihnen wieder zurück zur vorhergehenden Übung bzw. zum vorausgegangenen Gespräch, um die dortigen Inhalte abzusichern.

Lernziele zu Kopiervorlagen 2, 3 und 5
In diesem Unterkapitel 13.1.2 sollen die Teilnehmer*innen mit grundlegenden Vorstellungen zur Multiplikation vertraut werden. Dabei geht es nicht primär um das Ergebnis von Multiplikationsaufgaben, sondern darum wie sich diese enaktiv, bildlich und symbolisch darstellen lassen. Bei Kopiervorlage 2 steht die enaktive Darstellung im Vordergrund. Die Teilnehmer*innen sollen handelnd Multiplikationsaufgaben nachspielen und dabei Fragen zu dem Gesehenen beantworten. Dabei steht primär eine zeitlich-sukzessive Vorstellung der Multiplikation im Vordergrund.

Kopiervorlage 3 fördert ebenfalls handelnde Darstellungen, aber auch bildliche. Hier geht es darum Multiplikationsaufgaben mit Steckwürfeln darzustellen. Auch hier geht es nicht primär um das Ergebnis der Multiplikation, sondern um eine eher räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation. Kopiervorlage 5 fokussiert auf einen Spezialfall der räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation, in der auch die Kommutativität deutlich wird. Eine Anordnung in Rechtecksform wäre daher wünschenswert. Aber auch hier geht es primär um die Darstellung multiplikativer Mengenhandlungen und nicht um das Ergebnis von Multiplikationsrechnungen.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Bei der Multiplikation wird der immer gleiche Summand addiert. Die Multiplikation ist demnach eine Addition gleicher Summanden.
- Bei einer Multiplikations-Aufgabe wird eine Zahl vervielfacht, d. h. eine Zahl ist nach der Vervielfachung mehrfach vorhanden.
- Bei der Multiplikation wird gefragt: „Wie viele sind es insgesamt?“
- Auch bei einer Additionsaufgabe wird gefragt, wie viele es insgesamt sind. Dabei werden aber auch unterschiedliche Summanden addiert.
- Der erste Faktor gibt an, wie oft die Teilmenge vorhanden ist. Der zweite Faktor gibt die Größe der einzelnen Teilmengen an.

13.1.3 Einzelarbeit und Aufgabenblatt 13.1 a – sprachliche Beschreibungen multiplikativer Mengenhandlungen

Didaktische Ziele

- Bildliche Darstellungen von Multiplikationen interpretieren, passende Malaufgaben dazu finden und sprachlich beschreiben
- Die Rolle der Faktoren sicher unterscheiden

EXPLORATION

In den folgenden Unterrichtssequenzen werden sich die Teilnehmer*innen weitestgehend selbstständig mit multiplikativen Sachsituationen auseinandersetzen mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen.

Im ersten Themenbereich *sprachliche Beschreibungen multiplikativer Mengenhandlungen* sollen bildlichen Darstellungen von multiplikativen Mengenhandlungen die entsprechenden verbalen Beschreibungen zugeordnet werden und anschließende die passende Mal-Aufgabe notiert werden. Dabei geht es auch darum ein entsprechendes Vokabular für multiplikative Situationen kennen zu lernen bzw. zu entwickeln. Dazu sollen die Teilnehmer*innen **Aufgabenblatt 13.1 a** bearbeiten.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 a

Die Kursleitung gibt jeder*m Teilnehmer*in das **Aufgabenblatt 13.1 a**.

Es wird kurz besprochen worauf es bei den Aufgaben ankommt. Dann wird den Teilnehmer*innen Zeit gegeben das **Aufgabenblatt 13.1 a** zu bearbeiten. Im Anschluss an die Einzelarbeitsphase geht die Kursleitung alle Aufgaben gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durch.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 a
Das **Aufgabenblatt 13.1 a** fokussiert neben bildlichen Darstellungen von Multiplikationen vor allem auf deren verbaler Beschreibung. Insbesondere Teilnehmer*innen nicht-deutscher Muttersprache sollten mit sprachlichen Beschreibungen (z. B. je, 3mal, in jeder ... gibt es genau ..., etc.) für multiplikative Situationen und Handlungen vertraut werden. Außerdem geht es dabei auch immer darum die passende symbolische Darstellung zur bildlichen bzw. verbalen Beschreibung zu finden, wobei die unterschiedliche Bedeutung der beiden Faktoren eine Rolle spielt.

13.1.4 Kursgespräch Aufgabenblatt 13.1 b und Einzelarbeit Aufgabenblatt 13.1 c – Rechenskizzen

Didaktisches Ziel
Verbal beschriebene Sachsituationen zu multiplikativen Mengenhandlungen in bildliche und symbolische Darstellungen umwandeln

EXPLORATION

Im zweiten Themenbereich *Rechenskizzen* werden Rechenskizzen erstellt. Diese Form der Visualisierung hat sich in der Arbeit mit *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* als äußerst hilfreich erwiesen – vor allem, wenn es den Teilnehmer*innen schwer fällt, die entsprechenden Gleichungen zu einer umschriebenen Sachsituation zu finden. Aus den erstellten Zeichnungen werden die entsprechenden Teilmengen und so auch die Additions-Aufgabe ersichtlich. Mithilfe der Plus-Aufgabe gelingt das Herausarbeiten der passenden Multiplikationsaufgabe leichter. Während des Anfertigens einer Skizze setzen sich die Teilnehmer*innen intensiver mit der Aufgabe auseinander und notieren nicht schnell *irgendeine* Gleichung. Zudem fallen Fehlschlüsse schon bei der Erstellung der Skizzen oder beim Übersetzen in eine Gleichung auf. Dazu wird zuerst **Aufgabenblatt 13.1 b** gemeinsam mit der Kursleitung besprochen und dann **Aufgabenblatt 13.1 c** in Einzelarbeit bearbeitet.

AUFGABENBLATT 13.1 b/c

Die Kursleitung gibt jedem*r Teilnehmer*in das **Aufgabenblatt 13.1 b.**

Die Teilnehmer*innen erhalten zwei Minuten Zeit, sich die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen anzuschauen. Anschließend geht die Kursleitung alle Aufgaben gemeinsam mit ihnen durch. Die Kursleitung erfragt, ob es bereits Teilnehmer*innen gibt, die schon Ideen haben, wie die einzelnen Aufgaben zu erledigen bzw. die Fragen zu beantworten sind. Das **Aufgabenblatt 13.1 b** kann gemeinsam mit dem Kurs besprochen und bearbeitet werden, das nachfolgende **Aufgabenblatt 13.1 c** hingegen bearbeiten die Teilnehmer*innen selbstständig.

Rechenskizze
Wesentlich für eine Skizze/Zeichnung ist die Bewusstwerdung darüber, worum es in der Aufgabe geht. Also könnte eine passende Rechenskizze z. B. drei Netze mit jeweils fünf Orangen enthalten. Ebenfalls wäre es möglich, drei Fünfermengen zu zeichnen.

Rechnung Plus-Aufgabe
Eine Rechnung zur beschriebenen Situation bzw. zur Rechenskizze zu finden, kann leichter sein, wenn man dabei an eine Plus-Aufgabe denkt. So können verschiedene Plus-Aufgaben aus der Skizze abgelesen werden. Sollte es beim Zuordnen der Plus-Aufgabe Probleme geben, ist es wahrscheinlich, dass die Operationslogik der Addition noch nicht verstanden wurde und es muss mit der*dem Teilnehmer*in thematisch zurückgegangen werden. Das Verständnis der Operationslogik der Addition ist Voraussetzung für das Verstehen der Multiplikation. Es sollte darauf geachtet werden, dass auf jeden Fall die Plus-Aufgabe, bei der gleiche Summanden addiert werden, genannt wird.

Rechnung Mal-Aufgabe
Das Ermitteln der Mal-Aufgabe ist schwieriger als das Zuordnen der Plus-Aufgabe. Nehmen wir das Beispiel vom **Aufgabenblatt 13.1 a** zu Hilfe. Wahrscheinlich wissen die Teilnehmer*innen, dass es um drei und fünf gehen muss. Aber 5 · 3 oder 3 · 5? Können die Teilnehmer*innen das aus ihrer Skizze nicht ablesen, stellt die Kursleitung ähnliche Fragen wie bei der Aufgabe und dem Kursgespräch.

Mengenhandlung Multiplikation:

- „Wie kann die Plus-Aufgabe anders / in kürzerer Form aufgeschrieben werden?“
- „Wie oft würde sie Orangen holen gehen?“
- „Wie viele Orangen würde sie jedes Mal mitbringen?“
- „Sind es 5 · 3 Orangen oder sind es 3 · 5 Orangen ?“

Antwort auf die Frage aus der Sachsituation
Die Kursleitung weist die Teilnehmer*innen darauf hin, dass die Formulierung eines passenden Antwortsatzes leichter fällt, wenn sie sich die Frage vorher noch einmal durchlesen. Das erneute Lesen der Frage kann aber auch dazu führen, dass die Teilnehmer*innen selbst feststellen, dass die berechnete Zahl nicht zur Frage passt.

Die Kursleitung ermutigt die Teilnehmer*innen, auch bei Unsicherheiten ihre Lösungsideen zu notieren. Manchen Menschen fällt es leichter, Antworten mit einem Bleistift aufzuschreiben, wenn sie sich nicht ganz sicher sind.

Wurde das **Aufgabenblatt 13.1 b** erfolgreich erarbeitet, sollen die Teilnehmer*innen das **Aufgabenblatt 13.1 c** allein bearbeiten. Dazu sollten zunächst 15 Minuten Zeit gegeben werden. Anschließend prüft die Kursleitung, ob eine Zeitzugabe erforderlich ist.

Im Anschluss an die fünfzehnminütige Einzelarbeit finden sich jeweils zwei Teilnehmer*innen zusammen und besprechen ihre Ergebnisse. Sie sollen sich – wenn möglich – auf eine Lösung einigen und diese nach zehn Minuten Beratungszeit vorstellen.

Die Kursleitung geht während der Einzel- und der Besprechungszeit der Zweiergruppen zu den Teilnehmer*innen. Dabei schaut sie, ob es Personen gibt, die große Probleme mit der Bearbeitung des Aufgabenblattes haben. Diese Teilnehmer*innen sollten mit entsprechenden Fragestellungen aus dem Kursgespräch *Mengenhandlung Multiplikation* unterstützt werden.

Wenn sich die Zweiergruppen beraten haben, kann die Kursleitung, je nach Gruppendynamik, entweder die Ergebnisse durch eine der Zweiergruppen vorstellen lassen oder die Fragen und Antworten mit allen Teilnehmer*innen gemeinsam durchsprechen. Die Kursleitung lässt diverse Rechenskizzen an die Tafel zeichnen. Diese werden schließlich miteinander verglichen.

Die Teilnehmer*innen sollten bei der Vorstellung begründen, wie sie zur Lösung gekommen sind. Wer sicher verstanden hat, worum es geht, kann sein Vorgehen auch erklären. Interessant ist auch, ob andere Teilnehmer*innen bei einer bestimmten Aufgabe andere Ideen hatten. Die Kursleitung sollte nicht nur nachfragen, wenn etwas falsch ist, sondern möglichst bei jeder Antwort – auch den richtigen Antworten – nachhaken und sich die Ergebnisse begründen lassen. Teilnehmer*innen und Kursleitung diskutieren gemeinsam, warum eine Lösungsidee eventuell nicht zum Ziel geführt hat.

Sollte die Kursleitung bemerken, dass einige Teilnehmer*innen
- keine passende Skizze anfertigen können,
- keine Antworten finden oder
- keine Rechnungen zu den Sachsituationen finden,

dann sollte sie weitere Aufgaben in diesem Format entwickeln. Neben Beispielen, die vielleicht im Unterrichtsverlauf aufgetaucht sind, sind mögliche Multiplikationssituationen für die Erstellung weiterer Aufgabenblätter:

BEISPIELE

- Talita geht jede Woche dreimal/achtmal/neunmal joggen. Wie oft war sie innerhalb von vier/sechs/acht Wochen joggen?
- Für eine Kanne Tee braucht man jeweils zwei Teebeutel. Zoe soll fünf/acht/15 Kannen Tee kochen.
- In einer Packung Kaugummi sind immer sechs Streifen. Ella kauft sich sieben/drei/zwölf Packungen.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 b und 13.1 c
Bei den Aufgabenblättern 13.1 b und 13.1 c geht es primär darum, verbale Beschreibungen von multiplikativen Mengenhandlungen in bildliche Darstellungen und schließlich auch in symbolische Darstellungen umzuwandeln.
Bei den bildlichen Darstellungen wäre es entscheidend, dass es den Teilnehmer*innen gelingt diese strukturiert darzustellen, sodass jeweils gleichmächtige Teilmengen gut erkennbar sind. Aus diesen gleichmächtigen Teilmengen sollten sich dann Plus-Aufgaben ergeben, bei denen der gleiche Summand mehrfach addiert wird, was schlussendlich in eine Mal-Aufgabe übergeführt werden sollte. Es sollten aber auch andere passende Rechnungen zugelassen und gegebenenfalls besprochen werden.
Auch hier steht noch nicht das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe im Mittelpunkt.

13.1.5 Einzelarbeit Aufgabenblätter 13.1 d und 13.1 e – Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation

Didaktisches Ziel
In multiplikativen Mengenhandlungen gleichmächtige Teilmengen und die Anzahl dieser Teilmengen unterscheiden (zur Festigung der unterschiedlichen Bedeutungen der beiden Faktoren und des Zusammenhangs von Plus und Mal)

Mithilfe der Aufgabenblätter 13.1 d und 13.1 e werden sich die Teilnehmer*innen intensiver mit den Gesamt- und Teilmengen beschäftigen. Im Unterschied zur Addition und Subtraktion sind bei der Multiplikation die einzelnen Teilmengen nicht mehr direkt aus der Gleichung ablesbar. Die multiplikative Mengenhandlung ist schwerer aus der Gleichung abzulesen als bei Additions- und Subtraktions-Aufgaben. Die Beschäftigung mit Gesamt- und Teilmengen wird zu einem tieferen Verständnis der Multiplikation führen. Auch das Herleiten der Aufgaben des kleinen Einmaleins und das spätere Multiplizieren werden durch die Beschäftigung mit den verschiedenen Aspekten der Operationslogik erleichtert.

In den vorangegangenen Unterrichtseinheiten haben sich die Teilnehmer*innen mit dem Zusammenhang von Addition und Multiplikation beschäftigt und wurden darüber hinaus in das Arbeiten mit Rechenskizzen eingeführt. Das vorliegende Unterrichtskonzept beschäftigt sich mit Gesamt- und Teilmengen bei Multiplikationsaufgaben. Das Wissen darum, wie groß die Gesamt- und Teilmengen bei einer Mal-Aufgabe sind, wird es den Teilnehmer*innen erleichtern, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Mal-Aufgaben zu entdecken.

Sobald den Teilnehmer*innen z. B. bewusst ist, wie die Aufgabe $5 \cdot 6$ mit der Aufgabe $6 \cdot 6$, aber auch mit der Aufgabe $4 \cdot 6$ in Zusammenhang steht, werden sie Aufgaben flexibler ableiten. Ein schnelles, sicheres und flexibles Wissen um das Herleiten von Aufgaben des Einmaleins führt dazu, dass das Einmaleins schneller routinisiert wird und vermutete Ergebnisse kurzfristig auf Richtigkeit überprüft werden können.

Bevor die Teilnehmer*innen sich intensiv mit den Gesamt- und Teilmengen bei der Multiplikation beschäftigt haben, besteht häufig die Vermutung, dass vier und drei bei der Aufgabe $4 \cdot 3$ die Teilmengen sind. Ist nicht geklärt, dass bei dieser Aufgabe die Teilmengen drei, drei, drei und drei sind ($4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$), ist auch nicht erklärbar, wie $4 \cdot 3$ zusammen zwölf sein soll, denn vier *und* drei sind zusammen sieben ($4 + 3 = 7$). Besteht die Vermutung, dass vier und drei die Teilmengen sind, ist auch nicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ zu schließen: Es kann nicht erklärt werden, dass von $4 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3$) zu $5 \cdot 3$ ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$) eine Drei addiert werden muss.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 d

Jede*r Teilnehmer*in erhält ein **Aufgabenblatt 13.1 d.** Es wird ausreichend Zeit gegeben, um die Sachsituation und die dazugehörigen Aufgabenstellungen durchzulesen. Anschließend geht die Kursleitung das Aufgabenblatt gemeinsam mit den Teilnehmer*innen durch.

Worauf bei den Punkten *Rechenskizze* zu achten ist, wurde bereits in der *Einzelarbeit – Rechenskizzen* erläutert. Hinzu kommen im vorliegenden Unterrichtskonzept, mit den **Aufgabenblättern 13.1 d – 13.1 e,** die Fragen nach den Teilmengen und der Gesamtmenge.

Gesamtmenge
Das Wort *Gesamtmenge* beschreibt jene Menge, die nach der Vervielfachung einer Zahl, also einer Multiplikation vorliegt. Mit den nachfolgenden Fragen kann die Kursleitung den Teilnehmer*innen beim Erschließen des Begriffes Gesamtmenge bzw. bei der Übertragung des Begriffes auf die Operationslogik der Multiplikation helfen:

Wie viele sind es insgesamt?
Wie viele sind es zusammen?
Wie viele sind es, wenn man die Vervielfachung durchgeführt hat?
Wie viele sind es, wenn man alle(s) zusammenzählt?

Die Frage nach der Gesamtmenge ist leichter zu beantworten, wenn die Teilnehmer*innen bereits Rechenskizzen anfertigen und die passenden Plus-Aufgaben zur Handlung benennen können. Um die Gesamtmenge zu finden, muss gewusst werden, was bei dieser Aufgabe berechnet werden soll. Sollen z. B. die Kekse oder etwas ganz anderes ausgerechnet werden?

AUFGABENBLATT 13.1 e

Teilmengen
Das Herausarbeiten der Teilmengen ist unserer Erfahrung nach etwas schwieriger als das Finden der Gesamtmenge. Um die Frage nach den Teilmengen zu beantworten müssen die Teilnehmer*innen wissen, was zusammengerechnet werden soll (Kekse, Fliesen, …, etc.) und aus welchen Teilen sich die Gesamtmenge zusammensetzt.

BEISPIEL
Frieda backt drei Backbleche mit jeweils 8 Keksen. Sie backt somit 8 Kekse, noch einmal 8 Kekse und dann noch einmal 8 Kekse (8 Kekse + 8 Kekse + 8 Kekse = 24 Kekse). Die Teilmengen lauten also acht, acht und acht.

Es könnte fälschlicherweise angenommen werden, die Teilmengen wären einfach die beiden Faktoren. Im Keksbeispiel würden dann drei und acht als Teilmengen genannt. Bei diesem Fehlschluss kann die Kursleitung zeichnerisch oder mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen o. ä.) veranschaulichen, dass dies nicht sein kann. Frieda hätte, wenn drei und acht die Teilmengen wären, nur drei und acht Kekse gebacken, also zusammen elf. Das stimmt jedoch nicht mit der Sachsituation überein. Die Unterscheidung von erstem Faktor – der Zahl, die sagt, wie oft die Teilmengen vorhanden sind, – und den eigentlichen Teilmengen ist Grundlage eines sicheren Operationsverständnisses.

Folgende Fragen helfen zu verstehen, was eine Teilmenge ist:

Aus welchen Teilen hat sich das Ganze/die Gesamtmenge der 24 Kekse zusammengesetzt?

Woher wissen wir, welche Menge hier vervielfacht werden soll? Wie viele Kekse werden hier vervielfacht?

Woher wissen wir, wie oft hier vervielfacht werden soll?

Wie oft werden die Keksportionen vervielfacht?

Woher wissen wir, welche Menge hier vervielfacht werden soll?

Wie viele Kekse werden hier vervielfacht?

Wie oft werden die Stundenportionen vervielfacht?

Die Teilnehmer*innen erhalten das **Aufgabenblatt 13.1 e.** Für die Bearbeitung können vorerst 15 Minuten Zeit veranschlagt werden. Nach Ablauf der 15 Minuten überprüft die Kursleitung, ob das Zeitfenster ausreichend war.

Sollte es Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung geben, stellt die Kursleitung zusammen mit den Teilnehmer*innen die Sachsituationen mit Material (Steckwürfel, Wendeplättchen, Kugelschreiber o. ä.) nach. Die Kursleitung stellt gezielte Fragen, um bei der Bearbeitung einzelner Punkte zu unterstützen.

Bei der zweiten Sachsituation wurde offengelassen, für wie viele Wochen ein Monat hat. Es werden von den Teilnehmer*innen wahrscheinlich 4 Wochen, möglicherweise aber auch 5 Wochen genannt. Bei der Auswertung können also verschiedene Ideen gesammelt werden.

Die Kursleitung entscheidet, ob sie nach der Einzelarbeitsphase den Zwischenschritt der paarweisen Auswertung einbaut (wie bei den Erläuterungen zum **Aufgabenblatt 13.1 c** beschrieben).

Die Kursleitung macht es von der Gruppendynamik und dem Zeitbudget abhängig, ob sie die Aufgaben mit dem gesamten Kurs durchgeht oder ob die Ergebnisse in Tandems vorgestellt werden.

Die Teilnehmer*innen werden immer dazu aufgefordert, ihre Antworten zu erläutern. Folgende Fragen unterstützen das Erläutern:

Wie und warum sind Sie zu dieser Lösung gekommen?

Könnte nicht auch ... richtig sein?

*Haben die anderen Teilnehmer*innen andere Ideen/Lösungen?*

Bestehen bei den Teilnehmer*innen größere Unsicherheiten, kann die Kursleitung ähnliche Aufgabenblätter entwerfen. Die Inhalte, vor allem das Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation, das Identifizieren von Gesamt- und Teilmengen und schließlich das Entwickeln einer passenden Gleichung sind unbedingte Voraussetzung für das Routinisieren des Einmaleins. Dieses Wissen muss sicher und gefestigt sein, bevor mit dem Kurs das kleine Einmaleins (siehe *Kapitel 13.2*) erarbeitet wird.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 d und 13.1 e
Die Aufgabenblättern 13.1 d und 13.1 e fokussieren (ausgehend von verbalen und bildlichen Darstellungen) vor allem das Erkennen gleichmächtiger Teilmengen in multiplikativen Mengenhandlungen sowie die Anzahl dieser Teilmengen. Dadurch können die unterschiedlichen Bedeutungen der beiden Faktoren nochmals betont werden.
Aus dem Erkennen gleichmächtiger Teilmengen sollten sich dann Plus-Aufgaben ergeben, bei denen der gleiche Summand mehrfach addiert wird, was schlussendlich in eine Mal-Aufgabe übergeführt werden sollte. Weiters geht es auch um das Erkennen der Gesamtmenge der multiplikativen Mengenhandlung, wobei diese Gesamtmenge auf unterschiedliche Weisen (z. B. als Ergebnis der Plus-Rechnung oder mittels Abzählen etc.) ermittelt werden kann.

13.1.6 Einzelarbeit Aufgabenblätter 13.1 f und 13.1 g – Funktion der Faktoren/Faktorentausch

Didaktisches Ziel
Die unterschiedliche Bedeutung der beiden Faktoren sicher unterscheiden (als Vorbereitung zur richtigen Anwendung von Ableitungsstrategien)

In diesem Unterkapitel setzen sich die Teilnehmer*innen noch intensiver mit der Funktion des ersten und des zweiten Faktors auseinander. Nur wenn sie die unterschiedliche Funktion der beiden Faktoren verstanden haben, ist gesichert, dass sie Mal-Aufgaben problemlos ableiten können und somit das kleine Einmaleins routinisieren.

Gegenstand der nachfolgenden Aufgabenblätter ist die unterschiedliche Rolle der Faktoren in Multiplikationsaufgaben. Die Lösung – die Gesamtmenge – bleibt gleich, egal, welche Zahl die erstgenannte ist, aber die Mengenhandlung ändert sich. Die Unterscheidung des ersten und des zweiten Faktors ist wichtig für die Her- und Ableitung von Aufgaben des Einmaleins. Nur wenn die Teilnehmer*innen sicher wissen, dass bei $4 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3)$ die Drei viermal vorhanden ist, können sie leicht von $4 \cdot 3$ auf $5 \cdot 3$ $(3 + 3 + 3 + 3 \underline{+ 3}$(!)) schließen. Die Teilnehmer*innen schlussfolgern mit diesem Wissen sicher, dass bei $5 \cdot 3$ im Vergleich zu $4 \cdot 3$ nur eine Drei mehr vorhanden ist.

Den Teilnehmer*innen ist an dieser Stelle des Kurses bereits bewusst, dass der erste Faktor angibt, wie oft die Zahl an der Stelle des zweiten Faktors vorhanden ist. Nun stehen die Konsequenzen eines Faktorentausches im Mittelpunkt. Anschließend werden die Teilnehmer*innen aufgefordert, selbst eine Sachsituation zu beschreiben, bei der die Faktoren getauscht wurden.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 13.1 f

Vor der Bearbeitung des Aufgabenblattes sollte diesmal nicht angekündigt werden, welche Thematik im Fokus des **Aufgabenblattes 13.1 f** steht. Es könnte stattdessen ankündigt werden, dass nun überprüft wird, ob das Wissen um die Mal-Aufgaben bei allen Teilnehmer*innen sicher ist.

Die Fragestellungen nach passenden Rechnungen zur Situation und den Gesamt- und Teilmengen dürften nunmehr kein Problem darstellen, da diese bereits in den vorhergehenden Unterrichtssequenzen abgefragt wurden. Sollte es Teilnehmer*innen geben, die Schwierigkeiten beim Finden der zusammengehörigen Additions- und Multiplikationsaufgaben oder bezüglich der Gesamt- und Teilmengen haben, werden diese Themen erst abgesichert.

Darüber hinaus spricht die Kursleitung mit dem*der Teilnehmer*in über die Aufgaben und ergründet dabei, welcher mathematische Zusammenhang noch nicht verstanden wurde.

Besonderer Fokus liegt nun auf dem Faktorentausch, denn der einzige Unterschied zwischen der oberen und der unteren Aufgabe auf dem **Aufgabenblatt 13.1 f** liegt darin, dass die Faktoren getauscht wurden.

Im Auswertungsgespräch geht es um die wichtigsten Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben. Dabei helfen folgende Fragestellungen:

- Was fällt Ihnen bei beiden Aufgaben auf?
- Gibt es Gemeinsamkeiten zwischen der oberen und der unteren Aufgabe? Was ist gleich und was verändert sich?
- Ändert sich die Frage?
- Sehen Ihre Rechenskizzen für die obere Aufgabe anders aus als für die untere Aufgabe?
- Sind die Plus-Aufgaben/Mal-Aufgaben unterschiedlich? Wie unterscheiden sich die Plus-Aufgaben? Wie unterscheiden sich die Mal-Aufgaben?
- Ändert sich die Gesamtmenge? Ändern sich die Teilmengen?

Sollten im Anschluss an die Bearbeitung des **Aufgabenblattes 13.1 f** noch Unsicherheiten bestehen oder sollen Aufgaben für zu Hause mitgegeben werden, kann die Kursleitung weitere Aufgabenblätter in diesem Format erstellen. Die Kursleitung notiert zwei ähnliche Sachsituationen mit getauschten Faktoren, um das Wissen um die Konsequenzen eines Faktorentausches zu festigen.

BEISPIELE
für Rechengeschichten mit vertauschten Faktoren:

- Carlotta isst jeden Tag zwei Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie an 7 Tagen insgesamt gegessen?
- Carlotta isst jeden Tag sieben Scheiben Brot. Wie viele Scheiben hat sie dann an zwei Tagen insgesamt gegessen?
- Martin kauft drei Packungen mit Muffins. In den Packungen sind jeweils vier Muffins.
- Martin kauft vier Dreierpacks mit Muffins.

AUFGABENBLATT 13.1 g

Auf dem **Aufgabenblatt 13.1 g** sollen die Teilnehmer*innen eine bereits vorgegebene Sachsituation umschreiben und dabei die Textteile ändern, die einen Faktorentausch anzeigen.

Im sich anschließenden Auswertungsgespräch werden die Teilnehmer*innen ihre unterschiedlichen Ideen zur geänderten Sachsituation vortragen und schließlich gemeinsam mit der Kursleitung überlegen:

Wie ändert sich die Geschichte?

Was ist gleich an den Geschichten?

Was unterscheidet sich bei beiden Geschichten?

Muss die Rechenskizze nach dem Tausch der Faktoren anders aussehen? Ändern sich Frage und Rechnung?

Die selbst geschriebenen Geschichten der Teilnehmer*innen dürften sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden, da ausschließlich die Faktoren getauscht und die dafür wichtigen Stellen in der Geschichte abgeändert werden sollen. Leon muss nun sechs Eierpackungen mit jeweils zehn Eiern kaufen. Die Frage nach der Gesamtmenge der Eier und die Antwort *60* Eier bleiben gleich.

Auch entsprechend dem **Aufgabenblatt 13.1 g** können von der Kursleitung weitere Aufgabenstellungen entwickelt werden. Die Kursleitung beschreibt dafür Sachsituationen, die es den Teilnehmer*innen möglich machen, selbst die Geschichte so umzuschreiben, dass die Faktoren vertauscht sind.

BEISPIELE

In jeder Wohnung wohnen genau zwei Personen. Im Haus gibt es sechs Wohnungen.

Kai ist heute mit vielen Autos Probe gefahren. Er war in fünf Autohäusern und in jedem hat er ein Auto zur Probe gefahren.

Lernziele zu Aufgabenblatt 13.1 g

Auch in diesem Aufgabenblatt geht es nicht primär um das Ergebnis von Multiplikationsaufgaben, auch wenn durchaus die Gleichheit im Ergebnis von Tauschaufgaben (Aufgaben, in denen die Faktoren getauscht werden) erkannt werden sollte. Auch hier sollen wieder verbale und bildliche Darstellungen helfen eine Vorstellung von multiplikativen Mengenhandlungen aufzubauen. Entscheidend wäre, wenn Teilnehmer*innen erkennen würden, dass die Handlungen und bildlichen wie symbolischen Darstellungen und somit auch die Teilmengen bei Tauschaufgaben unterschiedlich sind, die Gesamtmenge jedoch die gleiche ist.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Ihr Wissen um die Operationslogik der Multiplikation sollte mit der Bearbeitung der **Aufgabenblätter 13.1 a** bis **13.1 g** erweitert und vertieft worden sein.
- Sie sind nun in der Lage, zu Sachsituationen die entsprechenden Multiplikationsaufgaben zu finden. Wenn zuerst die entsprechende Plus-Aufgabe herausgearbeitet wird, hilft das, die korrekte Mal-Aufgabe zu finden.
- Des Weiteren können die Teilnehmer*innen Fragestellungen zu multiplikativen Sachsituationen entwickeln. Die Teilnehmer*innen klären vorab, was sie herausfinden möchten und welche Informationen einer Sachsituation von Relevanz sind.
- Die Teilnehmer*innen können Sachsituationen analysieren und filtern die wichtigen Angaben aus einer Text- oder Sachaufgabe heraus. Darüber hinaus erlesen sie, was sie mit diesen Aufgaben berechnen können.

- Um sich den Umgang mit Mal-Aufgaben in Zukunft zu erleichtern, haben die Teilnehmer*innen gelernt, Rechenskizzen zu Sachsituationen anzufertigen. Durch das Anfertigen von Skizzen setzen sich die Teilnehmer*innen intensiver mit den Mengen und der Handlung auseinander, bevor eine Gleichung notiert und berechnet wird.
- Die Teilnehmer*innen können sicher Gesamt- und Teilmengen in Mal-Aufgaben benennen. Dies ist Grundlage für die Herleitung von Mal-Aufgaben. Bei der Herleitung von Aufgaben des Einmaleins ist es wichtig zu wissen, welche Zahl zu $4 \cdot 3$ hinzugefügt wird, um $5 \cdot 3$ zu ermitteln.
- Für die Routinisierung des Einmaleins ist es außerdem von Vorteil zu erkennen, wie sich ein Faktorentausch auf die Sachsituation auswirkt.