



5.2 Zahlzerlegungen

5.2.1 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gegenstände, Zahl/Anzahl, Einer

Didaktisches Ziel

die Begriffe *Menge*, *Zahl/Anzahl*, *Einer* und *Gesamtmenge* wiederholen, sofern noch begriffliche Schwierigkeiten bestehen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

AUFGABENBLATT 5.2 a

Je nach Kenntnisstand der Gruppe wiederholt die Kursleitung mithilfe des **Aufgabenblattes 5.2 a** *Anzahl und Einer* (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) den Zusammenhang zwischen Mengen, Zahlen/Anzahlen und Einern.

Die Kursleitung entscheidet, inwieweit das notwendig ist. Es kann bereits genügen, eine Aufgabe gemeinsam zu besprechen. Die erste Zeile des Aufgabenblattes ist bereits ausgefüllt.

Die Kursleitung erläutert:

Hier sehen Sie sechs Stifte. Dafür kann man auch sechs Einer aufschreiben, also für jeden Stift einen Einer. Das ist gleich wie die Zahl oder Anzahl Sechs. Die Frage, aus wie vielen Einern die Zahl Sechs besteht, muss man mit „sechs“ beantworten.

Es wird besprochen, was in diesem Beispiel das Gesamte ist. Mögliche Formulierungen sind: Sechs ist das Gesamte. Die Gesamtmenge beträgt sechs. Es sind insgesamt sechs Stifte.


Gegenstände	Einer	Zahl/Anzahl	Aus wie vielen Einern besteht die Zahl?
	1 1 1 1 1 1	6	sechs

Abbildung 5.2-1 Ausschnitt Aufgabenblatt 5.2 a

Das Wort *insgesamt* ist ein Schlüsselwort. Es hat bereits eine wichtige Rolle bei der Formulierung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion gespielt.

Falls von den Teilnehmer*innen der Zusammenhang von Gegenständen, Einern und Zahlen noch nicht verstanden worden ist bzw. die Formulierungen eine Herausforderung darstellen, sollte das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet werden. Jeweils ein Beispiel wird von einzelnen Teilnehmer*innen vorgestellt. Dabei sollen Antworten für nachfolgende Fragen formuliert werden:

Wie viele Gegenstände haben Sie gezeichnet?
Ist das gleich wie Ihre aufgeschriebene Anzahl?
Stellen Ihre gezeichneten Gegenstände eine Menge dar? Enthält diese Menge gleiche Elemente?
Welche Elemente haben Sie dargestellt?
Ist das wichtig für die Anzahl der Elemente? Welche Zahl können Sie dafür schreiben? Ist die Zahl gleich wie die Anzahl?
Wie viele Einer sind es?
Wie viele sind es insgesamt?
Wie groß ist in Ihrem Beispiel die Gesamtmenge?

Ergebnis dieser Wiederholung sollte sein, dass die Begriffe *Menge*, *Zahl* oder *Anzahl*, *Einer*, *Gesamtmenge* richtig zugeordnet und erklärt werden können.

5.2.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt – Gesamtmenge und Teilmengen

Didaktische Ziele

- Zerlegungen von Ganzen in Teile zunächst auf der Handlungsebene mit entsprechender Versprachlichung durchführen und dann – ganz abstrakt – auf Zahlzerlegungen übertragen
- durch systematisches, strukturiertes Vorgehen sollen Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen als Basis für eine Automatisierung verstanden werden („Hier eins mehr – da eins weniger.“)

EXPLORATION

Einsichten, die bei der handelnden Mengenzerlegung (Gesamtmenge in Teilmengen zerlegen) gewonnen wurden, werden nun auf Zahlzerlegungen übertragen. Dafür wird eine geeignete Visualisierungsform angeboten.

Erneut werden die verschiedenen Aufteilungen einer Gesamtmenge in zwei Teilmengen untersucht.

Diese Mengenbetrachtung hat zunächst wiederholenden Charakter, bereitet aber den sehr wichtigen Schluss auf die Zahlzerlegung vor.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 5.2b** *Gesamtmenge, Teilmengen, Zahlzerlegung* (Bearbeitungsdauer 10–20 Minuten) an die Teilnehmer*innen. In der folgenden Unterrichtssequenz wird das Aufgabenblatt gemeinsam bearbeitet. Auf der linken Seite des Aufgabenblattes werden Mengenbetrachtungen und auf der rechten Seite die entsprechenden Zahlbetrachtungen angestellt.

Die entsprechenden Abbildungen werden durch die Kursleitung auf Overhead-Folien oder mit einem Beamer gezeigt.⁴ Die Kursleitung erläutert zunächst die Abbildungen und die passenden Formulierungen. Die Teilnehmer*innen finden diese Abbildungen und Formulierungen auf dem vor ihnen liegenden **Aufgabenblatt 5.2b** (linker Teil).

AUFGABENBLATT 5.2b

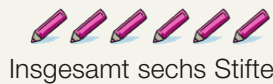
Auf dem [Aufgabenblatt 5.2b](#) ist die Gesamtmenge von sechs Stiften dargestellt. Die Teilmengen werden farblich unterschieden (rote und blaue Stifte).

Ziel ist es, den Gedanken zu verstehen und zu formulieren, dass in einer Gesamtmenge von insgesamt sechs Elementen unterschiedliche Teilmengen (die Teile) enthalten sein können.

Die Gesamtmenge ist sechs. Welche Teilmengen können darin enthalten sein? Auf dem Aufgabenblatt werden die Teilmengen mit unterschiedlichen Farben verdeutlicht.

Die Kursleitung vergewissert sich, dass die Formulierungen der Teilnehmer*innen passend sind. Die Kursleitung bittet verschiedene Teilnehmer*innen, die Abbildungen zu beschreiben und dabei die Begriffe Gesamtmenge und Teilmengen zu verwenden.

Es sind insgesamt sechs Stifte.



In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind fünf rote und ein blauer Stift enthalten. Die Teilmengen sind 5 und 1.



In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind vier rote und zwei blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 4 und 2.



Im Kursgespräch werden die noch nicht notierten Teilmengen der Gesamtmenge 6 ermittelt. Die Teilnehmer*innen schreiben jetzt die Formulierungen selbstständig auf das Aufgabenblatt. Gemeinsam werden die Formulierungen besprochen.

In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind drei rote und drei blaue Stifte enthalten. Die Teilmengen sind also 3 und 3.



*In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind zwei rote und vier blaue Stifte enthalten.
Die Teilmengen sind also 2 und 4.*



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): zwei rote, vier blaue Stifte (Teilmengen)

*In der Gesamtmenge von sechs Stiften sind ein roter und fünf blaue Stifte enthalten.
Die Teilmengen sind also 1 und 5.*



Insgesamt sechs (Gesamtmenge): ein roter, fünf blaue Stifte (Teilmengen)

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer*innen, dass sich jede*r sechs Wendeplättchen nimmt und die mit Stiften dargestellten Gesamt- und Teilmengen anhand von Wendeplättchen nachvollzieht.

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit sechs Wendeplättchen zu agieren (Beispiel Zweier-/Viererteilmenge): Entweder die Wendeplättchen werden schrittweise gewendet (z. B. ●●○○○○) oder die Wendeplättchen werden einfarbig verwendet und das Zerlegen in Teilmengen durch Auseinanderziehen der Plättchen angedeutet (z. B. ○○ ○○○○).

Wichtig ist an dieser Stelle, auf den Zusammenhang zwischen den einzelnen Zeilen in der Darstellung hinzuweisen. Ziel ist, dass die Teilnehmer*innen erkennen, dass von Zeile zu Zeile auf der linken Seite immer eins weniger wird und auf der rechten Seite eins mehr. Die Gesamtmenge bleibt gleich.

Dazu bittet die Kursleitung die Teilnehmer*innen, zu beschreiben, was sich von einer Darstellung zur nächsten Darstellung verändert hat. Eine mögliche Frage wäre: „Was verändert sich von der einen Darstellung zur nächsten?“

Auch beim Nachlegen der Darstellungen mit Wendeplättchen wird systematisch vorgegangen und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zerlegungen werden noch einmal versprachlicht.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Mit selbst durchgeführten Materialhandlungen haben sich die Teilnehmer*innen die Zusammenhänge mehrfach verdeutlicht und sie dabei versprachlicht. Ziel hierbei ist es, über das Verständnis der Zusammenhänge eine Grundlage für die Automatisierung sämtlicher Zahlzerlegungen zu schaffen.
- Wichtig ist die zusammenfassende Erkenntnis, dass der oben beschriebene Zusammenhang von Gesamt- und Teilmengen für alle Mengen gilt.

5.2.3 Vortrag und Aufgabenblatt 5.2b – Zahlzerlegungen

Didaktisches Ziel

durch systematisches, strukturiertes Vorgehen am Beispiel der Zahl 6 Zusammenhänge zwischen einzelnen Zahlzerlegungen erkennen („Hier eins mehr – da eins weniger.“)

EXPLORATION

Die Zahl Sechs kann zerlegt werden.

Das, was im linken Teil des **Aufgabenblattes 5.2b** als Mengensituation dargestellt ist, findet seine genaue Entsprechung in der Zahldarstellung im rechten Teil des **Aufgabenblattes 5.2b** – links die Gesamtmenge und ihre Teilmengen, rechts die entsprechende Zahl und ihre Zerlegungszahlen. Das Gesamte ist die Sechs. Die Teile sind z. B. die Fünf und die Eins.

Um das zu verdeutlichen, wird nachfolgend eine geeignete Form der Visualisierung vorgeschlagen.

Fundamental ist (unabhängig von der Visualisierung) der Denkschritt:

Zahlen repräsentieren und verdeutlichen Mengen. Die *Mengenzerlegung* (Teilmengen einer Gesamtmenge) kann auf Zahlen übertragen werden. Dabei wird von *Zahlzerlegungen* gesprochen. Die Teilnehmer*innen vollziehen hierbei zwei Abstraktionsschritte:

Abstraktionsschritt 1:

Mengendarstellungen abstrahieren tatsächlich vorhandene Mengen. Mengenhandlungen können mit unterschiedlichen Elementen vollzogen werden. Dabei stimmt die Anzahl überein. In diesem Beispiel werden insgesamt sechs Elemente in fünf Elemente und ein Element zerlegt. Dabei ist es nicht relevant, ob es sich um Stifte, Steckwürfel oder Wendeplättchen handelt.

Abstraktionsschritt 2:

Zahlen werden gedacht. Sie repräsentieren zwar konkrete Mengen (Anzahl), können jedoch ohne Mengenbezüge interpretiert werden. Zahlen bestehen aus Einern und lassen sich in Teile zerlegen. Die Zahlzerlegungen können immer wieder an Mengenhandlungen nachvollzogen werden. Das Loslösen (nicht das Ignorieren) von Mengenhandlungen führt die Teilnehmer*innen hin zum abstrakten Zahlverständnis.

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

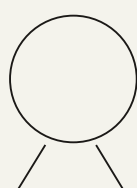
AUFGABENBLATT 5.2 b

Die Kursleitung erläutert an der Tafel die Visualisierungsform, die nachfolgend für Zahlzerlegungen genutzt werden soll. Im oberen Teil wird das Gesamte, die zu zerlegende Zahl eingetragen. Diese Zahl wird in zwei Teile zerlegt. Die beiden Teile werden jeweils an die beiden nach unten führenden Linien geschrieben. Das soll verdeutlichen, dass die beiden Teile in dem Gesamten enthalten sind.⁵

Zunächst wird diese Visualisierungsform gemeinsam auf dem [Aufgabenblatt 5.2 b](#) erprobt.

Es wird von der Mengenzerlegung auf die Zahlzerlegung geschlossen.

Dabei entsprechen das Gesamte der Gesamtmenge und die Teile den Teilmengen.


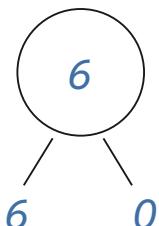

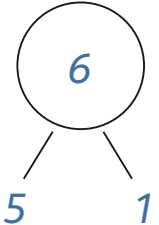

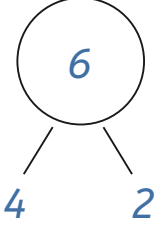


Das Gesamte – entspricht der Gesamtmenge

Die Teile – entsprechen den Teilmengen

Abbildung 5.2-2 Visualisierung der Zahlzerlegung

Die Teilnehmer*innen werden aufgefordert, eine Zahlzerlegung der Sechs in Teilmengen darzustellen. Dafür sollen auf dem [Aufgabenblatt 5.2 b](#) die Felder neben der passenden Mengenzerlegung genutzt werden.

Gesamtmenge, Teilmengen	Zugehörige Zahlzerlegung
 <i>insgesamt sechs rote Stifte, kein blauer Stift</i>	
 <i>insgesamt sechs: fünf rote, ein blauer Stift</i>	
 <i>insgesamt sechs: vier rote, zwei blaue Stifte</i>	


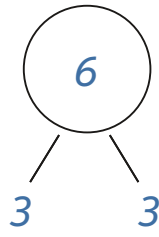

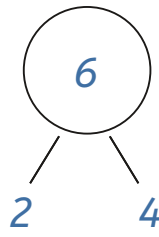

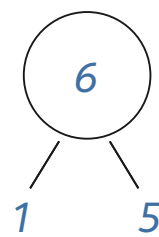

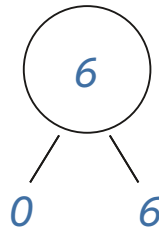
 <p><i>insgesamt sechs: drei rote, drei blaue Stifte</i></p>	
 <p><i>insgesamt sechs: zwei rote, vier blaue Stifte</i></p>	
 <p><i>insgesamt sechs: ein roter Stift, fünf blaue Stifte</i></p>	
 <p><i>insgesamt sechs: kein roter Stift, sechs blaue Stifte</i></p>	

Abbildung 5.2-3 Aufgabenblatt 5.2 b

Mögliche Formulierungen sind:

- Die Sechs kann in fünf und eins zerlegt werden.
- In der Sechs sind fünf und eins enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Die Sechs kann in vier und zwei zerlegt werden.
- In der Sechs sind vier und zwei enthalten.
- Das Gesamte ist die Sechs und die Teile sind die Fünf und die Eins.
- Usw.

*Warum ist das so? Wieso kann man die Sechs in verschiedene Teile zerlegen?
Warum kann man die Sechs in Zahlen aufteilen?*

*In der Sechs gibt es sechs Einer. Diese kann man unterschiedlich zusammenfassen.
Das ist jetzt tatsächlich eine Denk-Aufgabe: Sechs Einer kann man als fünf Einer
und einen Einer schreiben, Man denkt sich eine 5 und eine 1.*

*Oder sechs Einer kann man als vier Einer und zwei Einer schreiben. Man denkt sich eine
4 und eine 2.*



Die Kursleitung verdeutlicht die Zahlzerlegung der Sechs z. B. in nachfolgender Schreibweise an der Tafel. Das soll den Teilnehmer*innen zeigen, dass es auch andere Visualisierungen geben kann.

Zahlzerlegungen der Sechs:

$6 \rightarrow 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5$

Streng genommen kann die Sechs auch in die Null und die Sechs zerlegt bzw. in die Sechs und die Null zerlegt werden. Um das zu verstehen, bietet sich wiederum der Mengenbezug an.

Eine Menge von sechs Äpfeln kann natürlich in Teilmengen aufgeteilt werden. Selbstverständlich in vier und zwei Äpfel oder in drei und drei Äpfel und so weiter.

Vorstellbar ist aber auch, dass ein Teil leer ist und die sechs Äpfel dem anderen Teil zugeordnet werden. Leichter vorstellbar: Die Äpfel werden auf zwei Körbe verteilt. Ein Korb bleibt leer und in den anderen Korb werden sechs Äpfel gelegt.

Übertragen auf Zahlzerlegungen heißt das, dass die Null dazugehört.

Zahlzerlegungen der Sechs unter Einbeziehung der Null:

$6 \rightarrow 6/0; 5/1; 4/2; 3/3; 2/4; 1/5; 0/6$

Was unterscheidet die Zahlzerlegung der Sechs in $4/2$ und in $2/4$?

Auch hier erfolgt die Erklärung mit Mengenbezug: Mit dem Beispiel roter und blauer Stifte können die verschiedenen Sachverhalte folgendermaßen dargestellt werden.

Darstellung der Gesamtmenge 6 und der Teilmengen 2 und 4 sowie der Teilmengen 4 und 2:



Zum einen sind es zwei blaue Stifte sowie vier rote und zum anderen sind es vier blaue Stifte und zwei rote. Das sind unterschiedliche Mengensituationen.

Wichtig ist wieder, den Zusammenhang zwischen den einzelnen Zerlegungen zu betrachten und zu versprachlichen. Die Kursleitung betont die Einsicht: Auf der einen Seite wird eins weniger, auf der anderen Seite wird eins mehr, bleibt die Gesamtmenge aber gleich.

5.2.4 Gruppenarbeit und Aufgabenblatt 5.2c – Zahlzerlegungen

Didaktisches Ziel

die Zerlegungen aller Zahlen zwischen 5 und 10 in sämtlichen Varianten spielerisch trainieren: zunächst abstrakt aus dem Gedächtnis abgerufen und danach auch gegenständlich repräsentiert, mit dem Ziel der Automatisierung der Zahlbeziehungen

DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung teilt die Teilnehmer*innen in sechs Teams auf. Jedes Team hat jetzt die Aufgabe, für jeweils eine Zahl von 5 bis 10 alle möglichen Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2c Zahlzerlegungen** (Bearbeitungsdauer ca. 20 Minuten) zu notieren. Teamarbeit deswegen, weil damit gleichzeitig ein Gespräch über die Zahlzerlegungen angeregt wird.

Um Zahlzerlegungen nachvollziehen zu können, bieten sich Steckwürfel an:

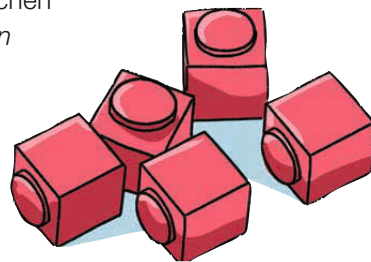


Abbildung 5.2-4 Mit Steckwürfeln Zahlzerlegungen nachvollziehen

AUFGABENBLATT 5.2c

Die Kursleitung erläutert die Aufgabenstellung – die Aufgabe ist für die Teilnehmer*innen auf Seite 1 des **Aufgabenblattes 5.2c** formuliert.

- Jedem Team wird eine Zahl von 5 bis 10 zugewiesen.
- Zunächst notieren die Teilnehmer*innen aus dem Gedächtnis, welche Zahlzerlegungen ihnen für die Zahl einfallen. Dafür nutzen sie die vorgesehenen Visualisierungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2c**. Es umfasst mehrere Seiten und eignet sich zur Protokollierung der Zahlzerlegungen der Zahlen 5 bis 10. Die Teilnehmer*innen suchen sich die entsprechende Seite für die zugewiesene Zahl heraus.
- Danach nimmt sich das Team die entsprechende Anzahl an Steckwürfeln.
- Gemeinsam werden alle möglichen Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl mit den Steckwürfeln nachvollzogen. Die noch nicht eingetragenen Zahlzerlegungen werden auf dem **Aufgabenblatt 5.2c** ergänzt.
- Im unteren Teil des Aufgabenblattes wird notiert, wie viele Zahlzerlegungen die Teilnehmer*innen für die zugewiesene Zahl finden.
- Die Teams haben anschließend die Aufgabe, die Zahlzerlegungen der zugewiesenen Zahl an der Tafel zu präsentieren.

Während die Teams die Zahlzerlegungen präsentieren, protokollieren die anderen Teilnehmer*innen die entsprechenden Zahlzerlegungen auf dem **Aufgabenblatt 5.2c**.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen sollten Folgendes können:

- Es gelingt, mit Gegenständen (hier Steckwürfel), die Zerlegungen aller Zahlen bis zehn darzustellen und zu benennen, was dem Gesamten und den Teilen entspricht.
- Das gelingt auch abstrakt. Alle Zahlen bis zehn können in ihre Teile zerlegt werden. Die gegenständlichen und die abstrakten Zerlegungen aller Zahlen bis zehn können präsentiert werden. Dabei können Zusammenhänge zwischen einzelnen Zerlegungen einer Zahl verbalisiert werden.
- Teilnehmer*innen gelingt es, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt zu nutzen.

BEISPIEL

für die Acht:

In der Gesamtmenge von acht Äpfeln sind auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind. Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht, ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. Wird nämlich von einer Teilmenge ein Element in die andere Teilmenge verschoben, ergeben sich aus der Zerlegung der Acht in Fünf und Drei auch die Zerlegungen in Vier und Vier sowie in Sechs und Zwei.

ENDNOTEN

- 1 Die Logik einer Rechenoperation zu verstehen heißt, interpretieren zu können, mit welcher Frage diese Rechenoperation sinnvoll verknüpft werden kann: Welche Fragen in welchen Situationen beschreiben die Operationen der Mengen oder Zahlen? Auf welche Weisen können diese Fragen beantwortet werden (bzw. welche Weisen der Beantwortung sind in der Mathematiker*innengemeinschaft gültig)?
- 2 Michael Gaidoschik (2007/2015). Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage). *Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.*
- 3 www.materialsuche.grundbildung.de (Tafelbilder)
- 4 www.materialsuche.grundbildung.de (Tafelbilder)
- 5 Es werden hier die Begriffe *Gesamtzahl* und *Teilzahlen* vermieden, weil sie ungebräuchlich sind. Im Grunde wären diese aber präzisere, vielleicht sogar verständlichere Begriffe als die Begriffe *das Gesamte* und *die Teile* – bei denen nicht explizit erkennbar ist, dass sie sich hier auf die Zahlenebene beziehen. Diese wären ebenso auf der Mengenebene als Synonyme zu *Gesamtmenge* und *Teilmengen* nutzbar.