
MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN

5



5 MENGEN UND ZAHLEN AUFTEILEN

Dagmar Grütte unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- Zahlen als Ganzes (als Gesamtes) verstehen, das aus (zwei oder mehr) Teilen zusammengesetzt ist
- Einsicht in die Prinzipien des Aufteilens von Gesamtmengen in Teilmengen gewinnen (Konstanz der Gesamtmenge bei gegen-sinniger Veränderung der Teilmengen)
- Verständnis für die Vielfalt möglicher Zusammensetzungen erarbeiten/festigen
- verschiedene Möglichkeiten erkunden, die Zahlen bis 10 zu zerlegen
- sämtliche Zahlzerlegungen automatisieren

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Zahlen als Anzahlen verstehen (Kardinaler Zahlaspekt ist Grundlage für das Verständnis von Zahlzerlegungen und Zahlbeziehungen. Werden Zahlen nämlich nicht als Mengen gedacht, sondern als Positionen, sind sie nicht in Teilmengen zerlegbar, Beziehungen zwischen Zahlen werden nicht erkannt.)
- Addition als Hinzufügen und Subtraktion als Wegnehmen verstehen (Wird die Addition als Vorwärts- und die Subtraktion als Rückwärtsschreiten in der Zahlwortreihe verstanden, fehlt die Grundlage für ein verständiges Handeln mit Gesamtmengen und Teilmengen.)
- Begriffe wie Gesamtmenge und Teilmenge kennen

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Das *kardinale* und das *relationale Zahlverständnis* bilden die Grundlage der rechnerischen Kompetenz.

Kardinalität entspricht der Anzahl der Elemente der Menge. Diese Anzahl ist eine natürliche Zahl n . Dabei wird auch von der Mächtigkeit einer endlichen Menge gesprochen. In einer Menge von acht Äpfeln ist die Mächtigkeit, die Anzahl oder die Gesamtheit acht. Das wird durch die Zahl Acht beschrieben. In der Menge dieser acht Elemente sind Teilmengen enthalten, dementsprechend sind in der Zahl Acht weitere Zahlen enthalten.

Im Folgenden wird für Anzahl auch von Gesamtheit, dem Gesamten oder der Gesamtmenge gesprochen. Es soll nämlich beschrieben werden, dass das *Gesamte* (die Gesamtheit, die Gesamtmenge) in *Teile* (Teilmengen) zerlegt werden kann. Zum Beispiel sind in der Gesamtmenge von acht Äpfeln auch Teilmengen von drei Äpfeln und fünf Äpfeln enthalten – die wiederum für sich Gesamtheiten sind.

Diese Mengenbetrachtung gilt für die Zahlbetrachtung gleichermaßen. Das heißt, in der Acht sind die Drei und die Fünf enthalten. Das Gesamte ist acht,

ein Teil dieses Gesamten ist drei und der andere Teil ist fünf. Das ist eine Erkenntnis über die Zahlbeziehungen von drei, fünf und acht (relationales Zahlverständnis).

Für die Acht gibt es weitere Zahlbeziehungen. In der Acht sind neben der Drei und der Fünf ebenso auch die Sechs und die Zwei oder die Sieben und die Eins enthalten. Das deckt sich mit Aussagen aus den vorangegangenen Kapiteln: Die Zahlen bestehen im abstrakten Sinn aus Einern oder Einsen. Die Einer können wieder zu Zahlen zusammengefasst werden.

Wenn die Acht aus acht Einern besteht, können zwei Einer zur Zwei zusammengefasst werden, die restlichen sechs Einer können zur Sechs zusammengefasst werden. Demnach sind in der Acht die Sechs und die Zwei enthalten. Das heißt, die Acht kann in zwei und sechs zerlegt werden.

Fünf Einer der Acht könnten aber auch zur Fünf zusammengefasst werden und die restlichen drei Einer zur Drei. Demnach sind in der Acht auch die Fünf und die Drei enthalten usw.

Diese Betrachtungen funktionieren auf der Mengenebene, sollen aber im nächsten Lernschritt unabhängig von dem unmittelbaren Mengenbezug gleichermaßen auf der Zahlenebene gedacht werden können.

Den Teilnehmer*innen soll es gelingen, die Zahlen mit ihren Beziehungen untereinander abzurufen und als Gedankenkonstrukt nutzen zu können. Das ist das relationale Zahlverständnis.

Mit dem *Gesamten* und den *Teilen* lassen sich Mengenhaltungen vornehmen, aus denen Rechenoperationen ableitbar sind:

BEISPIEL

Die Teile können zu einem Gesamten zusammengefasst werden. Das Zusammenfassen wird durch die Addition beschrieben und durch „+“ symbolisiert. Das heißt, die Teile Fünf und Drei werden zum Gesamten Acht zusammengefasst und mit einer Gleichung symbolisiert: $5 + 3 = 8$.

Dem Gesamten können Teile entnommen werden. Wird vom Gesamten Acht die Drei entnommen, bleibt die Fünf übrig: $8 - 3 = 5$.

Die Entnahme eines Teils kann auch in anderer Reihenfolge stattfinden. Der Acht kann auch die Fünf entnommen werden, dann bleibt die Drei übrig: $8 - 5 = 3$.

Hierbei wird von Rechenoperationen¹ gesprochen: Dem Rechnen liegen (Mengen-)Handlungen zugrunde, auf der Symbolebene werden dementsprechend die Symbole sinnvoll verknüpft. Das Operieren mit Zahlen wird symbolisch nachvollziehbar und eindeutig in sogenannten Rechenaufgaben ausgedrückt.

Nach dem verstehenden Erarbeiten der Inhalte dieses Kapitels sollte es den Teilnehmer*innen möglich sein, die kardinalen Eigenschaften der Zahlen bis zehn über das Beschreiben der Zahlzerlegungen sowie über das Beschreiben von Zahlbeziehungen zu denken und mit Rechenoperationen auszudrücken.

Das schließt ein, z. B. die Zahl Fünf als Gesamtes zu verstehen, das aus fünf Einern besteht. Diese fünf Einer können jeweils zu verschiedenen Teilen der Fünf zusammengefasst werden: Die Teile sind zwei und drei; drei und zwei; eins und vier; vier und eins. Ebenso können die Teile z. B. zwei und zwei und eins sein.

Darüber hinaus kann auch die Null in diese Betrachtungen einbezogen werden. Dann kann mit weiteren Teilen agiert werden. Zum Beispiel mit den Teilen null und fünf. Anders ausgedrückt ist die Fünf auch in die

Null und die Fünf zerlegbar. Die Null entspricht einer leeren Teilmenge.

Hervorgehoben werden sollten die Zahlbeziehungen zur Fünf und zur Zehn. Gaidoschik spricht von *geistigen Stützpunkten*.²

In der Tat sind die gewussten Beziehungen zur Fünf und zur Zehn fundamental: einerseits bezogen auf die Hände – eine Hand hat fünf Finger und beide Hände haben zehn Finger –, die geeignete Rechenhilfen darstellen, bevor die Zahlbeziehungen automatisch aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Entsprechend haben sich Visualisierungen bewährt, in denen die Fünf und die Zehn hervorgehoben werden (siehe Abakus, Zehnerfelder, Perlenketten mit jeweils fünf verschiedenfarbigen Perlen u. Ä.).

Andererseits liegt hier eine Vorstufe des Bündelungsgedankens, der die Basis des Dezimalsystems darstellt und leicht auf Zahlbereiche bis Hundert, Tausend usw. übertragen werden kann. Ein halbes Zehnerbündel sind fünf, zwei Fünfer sind ein Zehner, zehn Zehner bilden Hundert usw.

Das relationale Zahlverständnis im Zahlbereich bis zehn ist mitentscheidend dafür, ob die Teilnehmer*innen das Dezimalsystem verstehen lernen. Dieses relationale Wissen kann später auf größere Zahlen übertragen werden. Ziel dieses Kapitels ist es zum Beispiel, sieben als fünf und zwei zu denken, somit auch in der Lage zu sein, von sieben fünf (oder zwei) wegzudenken oder auch fünf und zwei zusammenzudenken.

Diese Gedanken lassen sich später auf mehrstellige Zahlen übertragen: Siebzig (Siebenhundert ...) kann in fünfzig (fünfhundert ...) und zwanzig (zweihundert ...) zerlegt werden. Entsprechend sind fünfzig (fünfhundert ...) und zwanzig (zweihundert ...) zusammen siebzig (siebenhundert ...).

Das Verständnis von Zahlen und das Verständnis der Rechenoperationen bedingen einander. Wenn die Zahlen nicht als Ganzes verstanden werden, das aus Teilen zusammengesetzt ist, kann auch nicht die Subtraktion als das Entnehmen solcher Teile von einem Ganzen und ebenso nicht die Addition als das Zusammenfassen solcher Teile zu einem Ganzen verstanden werden.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine hohe Hürde für die Teilnehmer*innen ist es, ihr Mengen- und Zahlenwissen, das häufig immer noch rudimentär ist, in ein allgemeineres Wissen über die Beziehungen der Zahlen zu überführen. Bereits im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2) wurde zum kardinalen Zahlbegriff erarbeitet, dass Zahlen Anzahlen beschreiben. Um das zu verstehen, müssen die Lernenden erkennen, dass es bei Mengen eine Eigenschaft Anzählbarkeit gibt, die mithilfe von Zahlen beschrieben wird. Im Kapitel *Mengen und Zahlen vergleichen* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 4) wurde der Aufbau der Zahlen nach dem Prinzip „immer einer mehr“ erarbeitet. Dies wurde zu zwei mehr/zwei weniger und x mehr/ x weniger erweitert. Im hier vorliegenden Kapitel 5 wird dieses Wissen um den Begriff der Zahlzerlegung erweitert.

Die Routinisierung der Zahlzerlegungen wird vielen Teilnehmer*innen dabei nur gelingen, wenn sie eine begriffliche Vorstellung davon haben, was Zahlzerlegungen sind. Bezüge zu dinglich vorhandenen oder imaginierten Mengen sollen sie dabei immer wieder herstellen können. Das betrifft strukturierte Mengendarstellungen, insbesondere Strukturierungen, die mit Bezügen zur Fünf und zur Zehn arbeiten. Diese können das Denken von Zahlen in ihren Beziehungen zueinander und damit auch das Erinnern dieser Beziehungen in Form von Zerlegungen erleichtern.

Immer wieder sollte den Teilnehmer*innen verdeutlicht werden, dass zum Rechnen ein kardinales Zahlverständnis und nicht ein zählendes (ordinales) erforderlich ist.

Mit einem ordinal dominierten Zahlverständnis gehen Zähler*innen davon aus, dass die Zahl Acht das achte Zählobjekt meint. Sie wissen nicht sicher, dass Acht alle acht Elemente, also die Anzahl, meint. Wenn eine Gesamtheit nicht als solche verstanden wird, dann gelingt es nicht, von dieser Gesamtheit auf andere zu schließen, also Mengenbeziehungen abzuleiten. Dementsprechend können dann auch Zahlbeziehungen nicht hergestellt werden. Es kann nicht verstanden werden, dass in der Acht die Fünf und die Drei enthalten sind, wenn in der Vorstellung mit der Zahl Acht das achte Element verbunden wird.

Manchen Teilnehmer*innen wird die Vielzahl von Begriffen verwirrend vorkommen:

Wann benutze ich Anzahl, wann Zahl, Gesamtes, Gesamtmenge, Gesamtheit?

Und wieso ist eine Teilmenge auch eine Gesamtheit, die ich wieder zerlegen kann? Wie kann ich denn überhaupt gedachte Zahlen zerlegen?

Eine eigene Ordnung in diesem komplexen Gedankenkonstrukt herzustellen, braucht oft viel Geduld, Motivation, Beharrlichkeit und Zeit. Einigen wird es schwer fallen, sich sprachlich auszudrücken, Rechenwege zu beschreiben, Zahlbeziehungen zu formulieren und Zusammenhänge zu begründen. Sie haben Zahlen oft noch nie so gedacht und damit nie experimentiert.

Immer wieder muss den Teilnehmer*innen verdeutlicht werden, dass Verstehen über Sprache funktioniert. Wenn etwas verstanden ist, kann es beschrieben werden. Es geht dabei nicht um Perfektion, sondern darum, eigene Worte für Zusammenhänge zu finden, denn über das Verständnis von Zusammenhängen bleibt das Gelernte nachhaltig im Gedächtnis. Das bedeutet für die Kursleitung, dass sie die Teilnehmer*innen immer wieder ermutigen und motivieren muss, die Rechenwege zu erläutern.

Manche Teilnehmer*innen werden Schwierigkeiten beim Visualisieren haben. Zahlzerlegungen können nicht direkt dargestellt werden. Wie soll das Zerlegen der als Zahlsymbol 8 aufgeschriebenen Zahl Acht dargestellt werden? Wird die Acht zerschnitten?

Die dafür genutzten Visualisierungen sind symbolisch gemeint. Auch an Mengenbildern kann die Zahlzerlegung sehr wohl abgebildet werden.

Ein erster Abstraktionsschritt ist, die an Objekten vorgenommenen Zahlzerlegungen (z.B. an Steckwürfeln) allgemeingültig darzustellen/zu visualisieren.

Ein weiterer Abstraktionsschritt ist, Mengenhandlungen mit Rechenoperationen zu verbinden und dafür eine geeignete Symbolschreibweise zu finden. Schwierigkeiten können umgekehrt auch dabei auftreten, Rechenoperationen mit Mengenhandlungen zu verbinden. Es muss also eingehend erarbeitet werden, wie die Addition und die Subtraktion visualisiert werden können.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Der kardinale Zahlbegriff wird im Kapitel *Kardinale und andere Nutzungen von Zahlen* eingeführt (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 2).

Im Kapitel *Mengen und Zahlen verändern* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 1, Kapitel 3) wird erläutert, wie Mengenhandlungen in Gleichungen und umgekehrt Gleichungen in Mengenhandlungen überführt werden können. Addition bedeutet etwas hinzufügen und Subtraktion etwas entnehmen. Es wird sichtbar gemacht, dass ein Teil übrig bleibt, wenn aus Mengen ein Teil entnommen wird. Die Begriffe Gesamtmenge und Teilmenge sind eingeführt.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Michael Gaidoschik (2007/2015): Rechenschwäche vorbeugen. Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. G&G Verlag, Wien (8. Auflage). *Das Buch wird wortidentisch vom Persen-Verlag, Buxtehude, unter dem Titel: „Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis“ vertrieben. Die Änderung von Titel und Cover erfolgte ohne Einwilligung des Autors.*
- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
 - Zahlzerlegungen: Stufe 1, S. 39 ff.
 - Bezüge zur Fünf und zur Zehn: Stufe 1, S. 20 ff., S. 37 f., S. 39 ff.

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Moderationskarten
- Stifte
- Kreppband
- Steckwürfel
- Chips
- Holzsteine
- Karten 1–10
- Fingerbilder
- andere Darstellungen der Zahlen ...