



2.1 Funktionen von Zahlen und Zahlnutzung

EXPLORATION

Das folgende Kursgespräch und die Aufgabenblätter laden die Teilnehmer*innen ein, gemeinsam über die unterschiedlichen Verwendungen von Zahlen zu diskutieren. Wenn man Menschen befragt, wozu sie Zahlen eigentlich brauchen, hört man häufig Antworten wie: „zum Rechnen“, „in der Schule“ oder „für den Matheunterricht“. Aufgrund dieser – nicht ausschließlich, jedoch sehr häufig – anzutreffenden, eingeschränkten Sicht auf Zahlen und Mengen wird in den folgenden Stunden mit den Teilnehmer*innen ein Überblick über die verschiedenen Verwendungen von Zahlen erarbeitet. So ist es ihnen besser möglich, die Zahlen in verschiedenen Situationen sachadäquat zu verwenden.

Die Teilnehmer*innen werden gemeinsam mit der Kursleitung feststellen, dass sie jeden Tag mit Zahlen und Mengen konfrontiert sind und damit bereits erfolgreich umgehen, ohne dass es ihnen in jeder Situation bewusst ist. Zudem sollen sie einen vielseitigen und umfassenden Blick auf Zahlen und Mengen entwickeln. Damit können den Teilnehmer*innen auch Ängste vor einem Kurs, in dem *nur* gerechnet wird, genommen werden – denn in den folgenden Stunden werden die Teilnehmer*innen aufgefordert, ihr „Alltags“-Wissen und ihre persönlichen Erfahrungen mit Zahlen aktiv in das Unterrichtsgeschehen mit einzubringen.

ZAHLNUTZUNG? ZAHLGEBRAUCH? ZAHLBEDEUTUNG? ZAHLBEGRIFF?

Wir werden in diesem Kurs überwiegend den Begriff *Zahlnutzung* verwenden, da dieser in der schlichtesten Weise wiedergibt, dass zunächst davon die Rede ist, auf welche Art und Weise und in welchen unterschiedlichen Kontexten Zahlen genutzt werden. Hierfür könnte man ebenso den Begriff *Zahlgebrauch* verwenden. Manchmal ist auch der Begriff *Zahlbedeutung* zu finden, da verschiedene Zahlnutzungen mit unterschiedlichen Bedeutungen der Zahlen arbeiten. In der Mathematikdidaktik ist der Begriff *Zahlaspekt* üblich. Dieser wenig verständliche Begriff stammt wahrscheinlich daher, dass die „Zahlnutzungen“ sehr verschiedene Charaktere haben. So kann

man der kardinalen, ordinalen und relationalen Zahlnutzung einen philosophischen Charakter zuschreiben: Man hat lange darüber gestritten, ob Zahlen eher kardinale oder ordinale Gebilde sind, was also die Wesenseigenschaft der Zahl ist. Entsprechend kann man vom *kardinalen* und *ordinalen Zahlbegriff* sprechen.

Die Codierungsnutzung ist im Vergleich dazu eher von schlichterer Natur. Man kann Zahlen codierend nutzen, dabei ist hingegen keine Wesenseigenschaft der Zahl zu finden. Die Nutzung als Rechenzahl scheint wiederum eine Art Restekategorie zu sein: Bei der Auflistung der Charakteristiken und der Nutzungsmöglichkeiten von Zahlen bemerkt man, dass Zahlen beim Rechnen oftmals eben gerade nicht im kardinalen, ordinalen oder sonstigen Sinne genutzt werden. Und genau hier liegt ein Kernproblem der Teilnehmer*innen: Sie haben ihre Rechenprozeduren nicht an kardinale Bedeutungen angebunden, sondern nutzen sie als Objekte von Prozeduren, die man Rechnen nennt. Genau das machen gute Rechner*innen auch: Sie arbeiten beim Rechnen nicht mit der kardinalen oder ordinalen Deutung der Zahl, sondern vollziehen lediglich Prozeduren. Der Unterschied ist, dass gute Rechner*innen diese Prozeduren an die kardinale Bedeutung der Zahlen zurückbinden können. Und eben diese Fähigkeit werden die Teilnehmer*innen oftmals erst noch erlangen.

2.1.1 Kursgespräch Zahlnutzung

Didaktische Ziele

- unterschiedliche Verwendungen von Zahlen im Alltag erkunden
- die wesentlichen Zahlaspekte (Kardinalzahl, Ordnungszahlzahl, Maßzahl, Rechenzahl und Codierung) kennen und in praktischen Beispielen unterscheiden

Beispiele für die Zahlnutzung erfragen, Kursleitung notiert die Beispiele auf Karten

Wo kommen Zahlen überall vor?

oder

Wofür brauchen wir überhaupt Zahlen?

können naheliegende Einstiegsfragen zum Themenbereich der Zahlnutzung sein. Die Teilnehmer*innen werden womöglich folgende oder ähnliche Antworten geben:



Mit diesen Antworten haben die Teilnehmer*innen die wesentlichen Nutzungsmöglichkeiten von Zahlen bereits genannt:

- a Nutzung als Maßzahl:** Hier gibt die Zahl die Menge einer bestimmten Einheit an.

BEISPIELE

5 Meter, 3 Stunden, 500 Gramm, 200 Euro

- b Nutzung als Rechenzahl:** Zahlen können zusammengefasst werden, aus einer Menge kann eine Teilmenge entnommen werden, eine Menge kann hinzugefügt werden, Zahlen können vervielfacht, eingeteilt oder verteilt werden.

BEISPIELE

$3 + 2 = 5$; $6 : 3 = 2$

Zum Thema der Unterscheidung des Zahl- und Mengenbegriffs finden Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen Kapitel 1.3 und 2.4 nähere Erläuterungen.

- c Nutzung als Kardinalzahl:** Zahlen geben die Mächtigkeit einer Menge an, d. h. sie geben die Anzahl der Elemente einer Menge wieder. Zahlen sind also die Antwort auf die Frage: Wie viele?

BEISPIELE

An der Straße stehen 3 Autos. Dort liegen 7 Dinge. Ich habe 8 Kekse gegessen. Dort sind zwölf.⁴

Weniger präsent sind häufig folgende Zahlaspekte:

- d Nutzung als Ordnungszahl/Ordinalzahl:** Zahlen beschreiben die Position in einer Rang- bzw. Reihenfolge. Zahlen sind also die Antwort auf die Fragen: Der/Die/Das wievielte? Welche Nummer? ...

BEISPIELE

der erste Platz, das zehnte Mal, Haus Nr. 104, Platznummer Reihe 3 Sitz 12, der Letzte

- e Nutzung zur Codierung:** Zahlen sind der Code, also der Schlüssel für etwas, mit den Zahlen wird eine Person, ein Telefonanschluss oder ein Ort verschlüsselt.

BEISPIELE

Autonummernschilder, Telefonnummern, Postleitzahlen, Steuernummer, Mitgliedsnummer, Rechnungsnummer

Einige Situationen, in denen Zahlen auftreten, lassen sich nicht eindeutig einem der oben genannten Zahlaspekte zuordnen: zum Beispiel Lottozahlen, Zahlen in Kapitänsaufgaben³.

Sicher ist es günstig, bei dieser Übung keine Beispiele vorzugeben, jedoch empfiehlt es sich für die Kursleitung, ein paar Beispiele für alle Zahlnutzungen in der Hinterhand zu haben.

Zahlverwendungen gruppieren

Wurden die Antworten der Teilnehmer*innen auf Karten notiert, so können sie jetzt an der Tafel gruppiert werden.

Mögliche Fragen, um die gegebenen Antworten zu gruppieren, können sein:

*Sind zwei Beispiele ähnlich oder gleich?
Welche Beispiele gehören zusammen?
Welches Beispiel passt nicht dazu?*

Was macht/Welche Funktion hat die Zahl in diesem Beispiel? Wofür ist die Zahl in Ihrem Beispiel da?

Könnte die Zahl in diesem Fall nicht einfach weggelassen werden? Warum nicht?

Welche Rolle spielt die Zahl in diesem Beispiel?

Gibt es ähnliche Beispiele wie das von Ihnen genannte?

Was haben diese Beispiele gemeinsam?

Warum sind diese Beispiele ähnlich? Was wird in den Beispielen mit den Zahlen gemacht?

Wofür sind die Zahlen in diesen Beispielen da?

Die Teilnehmer*innen müssen zum Gruppieren der Antworten nicht unbedingt die Begrifflichkeiten (die Kategorien der Zahlnutzung) kennen. Sicherlich aber können sie begründen, wenn Beispiele ähnlich sind und deshalb möglicherweise in eine Kategorie fallen, also eine ähnliche Zahlnutzung erfahren.

Die Kategorie der Zahlnutzung herausstellen

Um sich im Anschluss an die Gruppierung den Zahlnutzungen zu nähern, ist es förderlich, wenn die Teilnehmer*innen versuchen, die Funktion der Zahlen in den Beispielen zu vergleichen und Gemeinsamkeiten zwischen den Zahlnutzungen zu finden.

BEISPIEL 1

zur Herausstellung der Zahlnutzungs-kategorie

Es werden die Antworten „zum Rechnen“ und „beim Einkaufen“ genannt. Auch ohne dass die Zahlaspekte bekannt sind, könnte ein*e Teilnehmer*in auf die Frage „Was haben die beiden Verwendungen gemeinsam?“ beschreiben, dass bei beiden Beispielen die Zahlen zusammengerechnet werden (Nutzung als Rechenzahl).

Mögliche Fragen, um die Teilnehmer*innen zur Zuordnung der Beispiele zu den Zahlnutzungen hinzu-leiten wären:

BEISPIEL 2

zur Herausstellung der Zahlnutzungs-kategorie

Es werden die Antworten „bei der Postleitzahl“ und „beim Nummernschild“ genannt. Auch ohne dass die Kategorien der Zahlnutzungen namentlich bekannt sind, könnte ein*e Teilnehmer*in auf die Frage „Wofür sind die Zahlen in Ihrem Beispiel da?“ beschreiben, dass in beiden Beispielen die Zahlen zu Personen oder Orten gehören (Nutzung zur Codierung).

Die Antwort „beim Einkaufen“ verdeutlicht, dass Zahlen in einer Situation in unterschiedlicher Art und Weise genutzt werden können. Aus der Antwort „zum Einkaufen“ kann nicht direkt abgeleitet werden, welche Zahlnutzung hier angesprochen werden soll. Mit der Antwort „zum Einkaufen“ wurde nicht ausreichend konkretisiert, welche Zahlen beim Einkaufen denn gemeint sind. An folgenden Beispielen wird deutlich, dass Zahlen in einer Situation zu verschiedensten Zwecken genutzt werden können:

- Rechnungssumme (25,78 € = 25 € und 78 ct): Nutzung als Maßzahl und (bei anzahlhafter Vorstellung) als Kardinalzahl
- Anzahl der Lebensmittel, die gekauft wurden (12 Artikel liegen im Einkaufskorb): Nutzung als Kardinalzahl
- Mehrere Artikel eines Produktes wurden gekauft (5 · eine Milch): Nutzung als Kardinalzahl und Maßzahl
- Aus einem Regal wurden einige der Artikel entnommen und in den Einkaufswagen gepackt (13 Radierer – 4 Radierer = 9 Radierer): Nutzung als Rechen-, Maß- und Kardinalzahl
- Der Kunde überschlägt schon vor dem Bezahlen, wie viel er ungefähr bezahlen muss (2 € + 4 € + ≈ 27 €): Nutzung als Maß-, Rechen- und (bei anzahlhafter Vorstellung) Kardinalzahl

- Die Bonnummer (wenn fortlaufend nummeriert): Nutzung als Ordnungszahl und zur Codierung
- Steuernummer auf dem Kassenzettel: Nutzung zur Codierung
- Für ein Gewinnspiel gibt es einen Gewinncode auf dem Kassenzettel: Nutzung zur Codierung
- Datum auf dem Kassenzettel: Nutzung als Maß- und Ordnungszahl, auch als Codierung deubar

Das letzte Beispiel, ein Datum, ist besonders gut geeignet, um Zahlverwendungen zu diskutieren und darüberhinaus aufzuzeigen, dass es nicht immer nur eine richtige Antwort gibt. Viele Teilnehmer*innen haben es während der Erprobungsphase als äußerst motivierend empfunden, mit der Kursleitung und den anderen Teilnehmer*innen die diversen möglichen Deutungen zur Zahlnutzung zu diskutieren.

Außerdem hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Kategorien der Zahlnutzung (Nutzung als Maßzahl, Nutzung als Rechenzahl, Nutzung als Ordnungszahl, Nutzung zur Codierung) einzeln auf A4-Blätter zu drucken, um sie dann im Kursraum aufzuhängen. So können in den sich anschließenden Stunden durch die Kursleitung immer wieder Querverbindungen zu diesem Thema hergestellt und die Konsequenzen für bestimmte Aufgabenstellungen analysiert werden.

2.1.2 Einzelarbeit und Aufgabenblatt 2.1 a Zahlnutzung

Didaktisches Ziel

Vertiefung: Praktische Beispiele der Nutzung von Zahlen werden selbständig den unterschiedlichen Kategorien der Zahlnutzung zugeordnet.

Mit den **Kopiervorlagen 1 und 2** kann die Kursleitung überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen selbstständig zwischen den unterschiedlichen Zahlnutzungen differenzieren können. Darüber hinaus soll die eigenständige Beschäftigung mit diesem Thema ein intensiveres Nachdenken befördern, weitere Diskussionen anstoßen und für die Teilnehmer*innen Erfolgserlebnisse schaffen, ohne dass dazu gerechnet werden musste.

Allen Teilnehmer*innen wird die **Kopiervorlage 1** und jeweils die bereits ausgeschnittenen Beispiele von **Kopiervorlage 2** ausgehändigt.

Die Arbeitszeit wird ca. 15 bis 20 Minuten betragen. Anschließend sollte jede*r Teilnehmer*in ein Beispiel vortragen und die Zuordnungsentscheidung begründen. Bei mehreren Beispielen sind unterschiedliche Zuordnungen sinnvoll. Es ist trotzdem nur jeweils ein Kärtchen vorhanden, damit die Teilnehmer*innen erleben, dass in der Mathematik verschiedene Lösungen sinnvoll sein können. Beteiligen sich die Teilnehmer*innen nicht an einer Diskussion, so kann die Kursleitung Beispiele falsch zuordnen und dann die Teilnehmer*innen fragen, ob richtig zugeordnet wurde. Wenn nicht, sollte geklärt werden, warum diese Beispiele nicht richtig zugeordnet sind und welche die korrekte Zuordnung ist.

Mit dem **Aufgabenblatt 2.1 a** kann eine ähnliche Aufgabenstellung zur Wiederholung bzw. Vertiefung als Hausaufgabe mitgegeben werden. Praktische Beispiele für die unterschiedliche Nutzung von Zahlen sollen der passenden Kategorie (Maßzahl, Rechenzahl, Kardinalzahl, Codierung und Ordnungszahl) zugeordnet werden. Die Teilnehmer*innen können sich dabei auch wieder selbst Beispiele ausdenken.

RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer*innen haben in Kapitel 2.1 ein Verständnis über die Bandbreite der Verwendung von Zahlen im Alltag erlangt. Sich mit Mathematik und Zahlen zu beschäftigen beinhaltet nicht nur das Rechnen, da Zahlen in vielen weiteren Kontexten verwendet werden. Zahlen werden auch zum Codieren, Messen, Bilden von Reihenfolgen, Operieren und zur Beantwortung der Frage „Wie viele?“ genutzt.

Möglicherweise steht nach der Bearbeitung der Aufgabenblätter die Erkenntnis, dass die Teilnehmer*innen in vielen Bereichen schon gut und sicher mit Zahlen umgehen. Diese Erkenntnis motiviert zur Teilnahme und stärkt das Selbstvertrauen. Und bei der späteren Erarbeitung der Rechenoperationen wird immer wieder auf den Aspekt der kardinalen Zahlnutzung zurückgegriffen werden.