



4.4 Wie viele sind es mehr oder weniger?

EXPLORATION

Eine wichtige mathematische Fragestellung ist, wie bestimmt werden kann, wie viele es mehr sind oder wie viele es weniger sind.

Wenn es bei den vorangegangenen Themen um Formulieren, Zählen, Zuordnen, Sortieren, Vergleichen, Abstrahieren und Seriation ging, soll jetzt die mathematische Beziehung zwischen Zahlen, ausgedrückt durch die Addition und Subtraktion, erarbeitet werden.

Was haben die Addition und die Subtraktion mit dem Thema „Vergleichen“ zu tun? Zwei Zahlen unterscheiden sich durch einen Wert – den Unterschied.

Wird zu der kleineren Zahl der Unterschied addiert, ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig. Der Unterschied entspricht der Differenz beider Zahlen – auch Zahlendifferenz genannt.

4.4.1 Kursgespräch – Unterschiedliche Zahlen und Aufgabenblatt 4.4 a Wie viele sind es mehr oder weniger?

Didaktisches Ziel

mathematische Beziehungen zwischen zwei Zahlen als Addition oder Subtraktion ausdrücken, d. h. den Unterschied zwischen zwei Zahlen durch Hinzufügen oder Wegnehmen ausgleichen

Werden zwei Zahlen verglichen, sind sie entweder unterschiedlich oder gleich.

Hier sollen Zahlen betrachtet werden, die sich unterscheiden. Um wie viel unterscheiden sie sich? Dieses Thema gibt die Kursleitung für das nachfolgende Kursgespräch vor.

Zunächst geht die Kursleitung wiederholend auf Mengenbetrachtungen ein. Die nachfolgenden Abbildungen werden an der Tafel/mit einem Beamer dargestellt und erläutert. Immer wieder vergewissert sich die Kursleitung, ob die Teilnehmer*innen Fragen haben.

Bisher wurde zum Beispiel erarbeitet, dass sich fünf und drei um zwei unterscheiden. Werden Fünfer- und Dreier-Mengen verglichen, ist eine mögliche Visualisierung folgende:

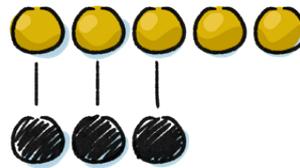


Abbildung 4.4-1 Vergleich einer Fünfer-Menge und einer Dreier-Menge – Unterschied zwei Elemente

Nach einer Eins-zu-Eins-Zuordnung kann für zwei Elemente der Fünfermenge keine Entsprechung in der Dreiermenge gefunden werden. Um diese zwei Elemente unterscheiden sich die Fünfer- und die Dreier-Menge, wenn die Anzahl der Elemente betrachtet wird.

Beide Mengen wären gleich groß, wenn sie entweder beide drei oder beide fünf Elemente enthalten würden.

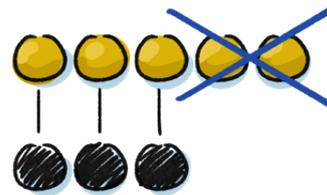


Abbildung 4.4-2 Zwei Elemente aus der Fünfer-Menge entfernen – Zwei Dreier-Mengen

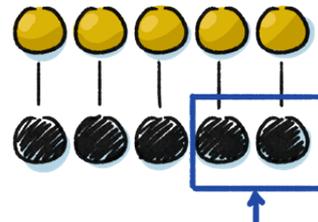


Abbildung 4.4-3 Zwei Elemente der Dreier-Menge zufügen – Zwei Fünfer-Mengen

Das heißt, entweder werden der Fünfer-Menge zwei Elemente entnommen oder zu der Dreier-Menge werden zwei weitere Elemente hinzugefügt. In beiden Fällen sind die Mengen nach der entsprechenden Handlung gleich groß.

EXKURS

Beide Mengen wären ebenfalls gleich groß, wenn sie zum Beispiel jeweils vier Elemente enthalten würden. Um das zu erreichen, müsste der Fünfer-Menge ein Element entnommen und der Dreier-Menge ein Element zugefügt werden. Als Gleichung ausgedrückt bedeutet das:

$$5 - 1 = 3 + 1$$

Die beiden mathematischen Ausdrücke (Terme) links und rechts vom Gleichheitszeichen beschreiben entsprechend die vorgenommene Handlung und stehen für 4.

Werden die oben beschriebenen Mengenhandlungen *symbolisiert*, gilt Folgendes:

$$5 > 3$$

$$1 + 1 + 1 + \boxed{+ 1 + 1} > 1 + 1 + 1$$

Fünf unterscheidet sich von drei um zwei. In der Fünf sind zwei Einer mehr enthalten als in der Drei. Der Unterschied zwischen fünf und drei beträgt zwei.

Um die Ungleichung in eine Gleichung umzuwandeln, gibt es wie oben beschrieben zwei Möglichkeiten. Es wird dabei auch von *Ausgleichen* gesprochen:

Entweder von fünf zwei entnehmen. Dann entsprechen beide Seiten drei. Oder der Drei zwei hinzufügen. Dann entsprechen beide Seiten fünf.

$$5 > 3$$

$$5 - \boxed{2} = 3 \quad \longrightarrow \quad 3 = 3$$

$$5 = 3 + \boxed{2} \quad \longrightarrow \quad 5 = 5$$

Die Kursleitung erläutert ein weiteres Beispiel an der Tafel:

Man vergleicht zwei und sechs. Zwei ist kleiner als sechs. Vergleich: $2 < 6$

In sechs sind vier Einer mehr als in zwei.

Einer: $1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Man kann ein Gleichheitszeichen setzen, wenn man entweder auf der linken Seite vier dazu gibt:

$$2 + 4 = 6$$

oder auf der rechten Seite vier wegnimmt:

$$2 = 6 - 4$$

Der Unterschied von Zwei und Sechs ist/ beträgt vier.

AUFGABENBLATT 4.4 a

Die Kursleitung erklärt das **Aufgabenblatt 4.4 a** *Unterschied* (auch an Beispielen) und bittet die Teilnehmer*innen, es zunächst selbstständig auszufüllen.

Wenn einem Teil der Gruppe unklar ist, wie die Aufgaben gelöst werden sollen, dann bespricht die Kursleitung beispielhaft weitere Aufgaben.

Setzen Sie das richtige Vergleichszeichen ein.			Verändern Sie die linke Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Verändern Sie die rechte Seite so, dass beide Seiten gleich werden.	Berechnen Sie den Unterschied.
a	>/</=	b			
3	>	1	$3 - 2 = 1$	$3 = 1 + 2$	2
7	<	9	$7 + 2 = 9$	$7 = 9 - 2$	2
6	<	10	$6 + 4 = 10$	$6 = 10 - 4$	4
1	<	5	$1 + 4 = 5$	$1 = 5 - 4$	4
5	<	8	$5 + 3 = 8$	$5 = 8 - 3$	3
9	>	6	$9 - 3 = 6$	$9 = 6 + 3$	3
4	<	5	$4 + 1 = 5$	$4 = 5 - 1$	1
7	>	1	$7 - 6 = 1$	$7 = 1 + 6$	6
2	<	4	$2 + 2 = 4$	$2 = 4 - 2$	2
0	<	7	$0 + 7 = 7$	$0 = 7 - 7$	7
8	>	3	$8 - 5 = 3$	$8 = 3 + 5$	5
10	>	2	$10 - 8 = 2$	$10 = 2 + 8$	8
4	=	4	$4 +/- 0 = 4$	$4 = 4 +/- 0$	0

4.4.2 Kursgespräch und Aufgabenblatt 4.4b – Unterschied von Zahlen

Didaktisches Ziel

Unterschied bzw. Differenz zweier Zahlen durch Addition (Ergänzung) oder Subtraktion ermitteln

Der Wert, um den sich zwei Zahlen unterscheiden, wird auch als *Differenz* bezeichnet. Die Begriffe Unterschied und Differenz sind synonym.

Der Begriff *Differenz* stammt aus dem Lateinischen „differentia“ und bedeutet Verschiedenheit. Es geht also um die Verschiedenheit der Zahlen.

Anhand des Zahlenvergleichs von 4 und 5 soll im Folgenden dargestellt werden, wie der Unterschied/die Differenz ermittelt werden kann. Die Kursleitung erläutert an der Tafel.

Vier und fünf unterscheiden sich um eins, sie sind also um eins verschieden. Der Unterschied bzw. die Differenz beider Zahlen ist eins.

Die Differenz oder den Unterschied von vier und fünf können Sie durch Subtraktion direkt berechnen. Dazu nimmt man die kleinere Zahl von der größeren Zahl weg und notiert:
 $5 - 4 = 1$

Der Unterschied zwischen fünf und vier beträgt eins.

Die größere Zahl erhalten Sie, wenn Sie zu der kleineren den Unterschied dazugeben:
 $5 = 4 + 1$

Oder anders ausgedrückt: Wenn Sie zu der kleineren Zahl den Unterschied dazugeben, erhalten Sie die größere Zahl:
 $4 + 1 = 5$

Die kleinere Zahl erhalten Sie, wenn Sie von der größeren den Unterschied wegnehmen.
 $4 = 5 - 1$

Oder anders ausgedrückt: Wenn Sie von der größeren Zahl den Unterschied wegnehmen, erhalten Sie die kleinere Zahl.
 $5 - 1 = 4$.

RÜCKSCHAU

Über den Unterschied/die Differenz von eins können die *Zahlbeziehungen* von vier und fünf beschrieben werden.

Wie groß ist der Unterschied/die Differenz von vier und fünf? „eins“.

$$5 - 4 = 1$$

Wie viele sind fünf mehr als vier? „eins“.

$$5 = 4 + 1$$

Wie viele sind vier weniger als fünf? „eins“.

$$4 = 5 - 1$$

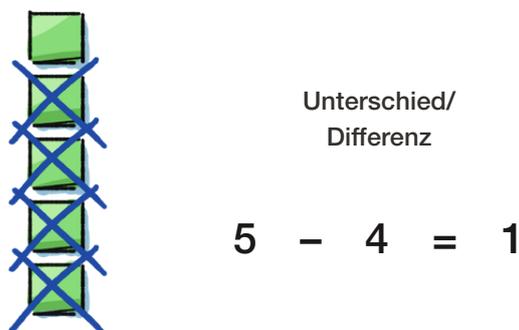
Vier und Fünf unterscheiden sich um „eins“.

Der Unterschied zweier Zahlen kann durch Addition bzw. Subtraktion ermittelt werden.

Die Mengendarstellung belegt, dass sich fünf und vier *um eins* unterscheiden.⁶



Wird der größeren Menge die kleinere Menge entnommen, bleibt genau dieser Unterschied übrig.



Wenn zu der kleineren Menge der Unterschied dazu- gegeben wird, erhält man die größere Menge.



$$4 + 1 = 5$$

Wenn von der größeren Menge der Unterschied ent- nommen wird, erhält man eine kleinere Menge.



$$5 - 1 = 4$$

Zwei Zahlen unterscheiden sich um eine bestimmte Zahl. Das ist die Differenz/der Unterschied der beiden Zahlen. Der Unterschied von drei und sieben beträgt vier.

BEISPIEL

Mengendarstellung	Terme
	$3 < 7$
	$7 - 3 = 4$
	$3 + 4 = 7$
	$7 - 4 = 3$

In den vorangegangenen Abbildungen wurden die Zahlbeziehungen mit Mengendarstellungen illustriert.

Mittelfristiges Ziel des Kurses ist es, die Kenntnis über die Beziehungen der Zahlen für das Rechnen zu nutzen, ohne auf Mengenbetrachtungen zurückgreifen zu müssen.

AUFGABENBLATT 4.4b

Das **Aufgabenblatt 4.4b** *Unterschied von Zahlen* fasst die Unterrichtssequenz zusammen. Es eignet sich zur Teamarbeit in Zweiergruppen oder als Einzelarbeit. Ebenso kann es als Hausaufgabe dienen. In die mittlere Spalte der Tabelle wird eingetragen, welche Additions- und Subtraktionsaufgaben die Zahlbeziehungen der jeweiligen Zahlen angeben. In die rechte Spalte wird der Unterschied/die Differenz beider Zahlen eingetragen.

Aufgabe	Additions- und Subtraktionsaufgaben	Unterschied
Ermitteln Sie die Differenz von 7 und 5.	$7 - 5 = 2$ $5 + 2 = 7$ $7 - 2 = 5$	2
Wie groß ist der Unterschied von 3 und 10?	$10 - 3 = 7$ $3 + 7 = 10$ $10 - 7 = 3$	7
Wie viele sind zwei weniger als fünf?	$5 - 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $5 - 3 = 2$	3
Um wie viele sind fünf weniger als zwei?	<i>Fünf sind nicht weniger als zwei.</i>	3
Vergleichen Sie 9 und 7.	$9 - 7 = 2$ $7 + 2 = 9$ $9 - 2 = 7$	2
Wie viele sind eins mehr als acht?	<i>Eins ist nicht mehr als acht.</i>	7
Wie viele sind einer mehr als acht?	<i>Einer mehr als acht sind neun.</i> $8 + 1 = 9$ $9 - 1 = 8$	1
Um wie viele sind acht mehr als einer?	$8 - 1 = 7$ $1 + 7 = 8$ $8 - 7 = 1$	7
Um wie viele sind drei weniger als sechs?	$6 - 3 = 3$ $3 + 3 = 6$ $6 - 3 = 3$	3
Um wie viel unterscheiden sich 8 und 1?	$8 - 1 = 7$ $1 + 7 = 8$ $8 - 7 = 1$	7
Um wie viel ist fünf größer als zwei?	$5 - 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ $5 - 3 = 2$	3
Um welche Zahl unterscheiden sich vier und neun?	$9 - 4 = 5$ $4 + 5 = 9$ $9 - 5 = 4$	5
Wie viel ist fünf kleiner als zehn?	$10 - 5 = 5$ $5 + 5 = 10$ $10 - 5 = 5$	5

Tabelle Lösungen für das Aufgabenblatt 4.4b

RÜCKSCHAU

Um Mengen zu vergleichen – Mengen enthalten unterscheidbare Elemente – kann entweder zählend die Anzahl der Elemente bestimmt werden und entsprechend diese Anzahl verglichen werden oder durch Zuordnung ermittelt werden, wodurch sich die Mengen unterscheiden. Mit Zuordnung ist gemeint, dass jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird – *Eins-zu-Eins-Zuordnung*.

Bei einem *Vergleich* von Zahlen werden deren Beziehungen – *Zahlbeziehungen* – betrachtet und bestimmt, um wie viel sich die Zahlen unterscheiden oder ob sie gleich sind. Das kann durch die Zeichen $<$, $>$, $=$ eindeutig ausgedrückt werden. Dabei sagen die Zeichen aus, ob eine Zahl größer als ($>$) oder kleiner als ($<$) die andere Zahl oder gleich ($=$) der anderen Zahl ist.

Um wie viel sich Zahlen unterscheiden, wird durch den Unterschied/die Differenz dieser Zahlen angegeben. Der Unterschied/die Differenz zweier Zahlen kann durch Subtraktion ermittelt werden: Von der größeren Zahl wird die kleinere Zahl abgezogen und übrig bleibt die Differenz/der Unterschied beider Zahlen. Wird dieser Unterschied zu der kleineren Zahl addiert, ergibt das die größere Zahl. Wird von der größeren Zahl der Unterschied subtrahiert, bleibt die kleinere Zahl übrig. Zum Verständnis von Zahlen führt, diese mit ihren Beziehungen zueinander zu denken:

BEISPIEL

Drei ist immer einer weniger/um eins weniger als vier. Vier ist immer einer mehr/um eins mehr als drei.

Diese Erkenntnis gilt für alle Mengen, in denen sich vier Elemente befinden und damit für die Zahl 4. Die Zahl 4 steht für alle Mengen mit vier Elementen. Die Zahl 4 ist abstrakt und muss nicht mit einer konkreten Menge in Verbindung gebracht werden. Die Zahl 4 kann immer in vier Einer zerlegt werden, so wie die Vierermenge immer in vier Einzelelemente zerlegt werden kann.

Das Zahlssystem der natürlichen Zahlen ist nach dem Prinzip der *Seriation um eins* aufgebaut, das heißt, dass zu jeder Zahl ein Einer hinzukommt und dass jede Zahl um eins mehr ist als ihr Vorgänger, entsprechend um eins weniger als ihr Nachfolger.

Auch mathematische Ausdrücke (Terme) können verglichen werden, zum Beispiel $5 - 1$ und $4 + 3$. Wird von fünf eins abgezogen, bleiben vier übrig. $5 - 1$ steht für vier. Werden zu vier drei dazugegeben, sind es zusammen sieben. $4 + 3$ steht für sieben. Da vier kleiner sieben ist ($4 < 7$), muss auch $5 - 1 < 4 + 3$ sein.

Der wesensbestimmende Bestandteil einer *Gleichung* ist das *Gleichheitszeichen*. Beide Seiten einer Gleichung können vertauscht werden, ohne dass sich die mathematische Aussage ändert.

Anders verhält es sich bei *Ungleichungen*. Beide Seiten des Vergleichs sind durch ein *Kleiner- oder Größer-Zeichen* verknüpft. Werden die Seiten von Ungleichungen vertauscht, kehrt sich das Vergleichszeichen um.

ENDNOTEN

- 1 Näheres vgl. Gaidoschik (2007/2015), S. 22 – 25.
- 2 Für die Formulierung *mathematischer Ausdruck* wird später der Fachbegriff *Term* eingeführt.
- 3 Die Teilnehmer*innen sollten die Eins-zu-Eins-Zuordnung in ihr Repertoire des Mengenvergleichs aufnehmen, um abzusichern, dass ihr Begriff von mehr und weniger wirklich ein mengenhafter ist und nicht lediglich die Idee umfasst, dass *mehr* dort ist, wo weiter gezählt werden muss.
- 4 Näheres vgl. Gaidoschik (2007/2015), S. 35 – 38.
- 5 vgl. z. B. Mathematik Basiswissen Schule, DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, 2005
- 6 Mengenhaltungen grafisch abzubilden ist nicht vollständig möglich. Besser ist, wenn die Situationen bzw. Handlungen mit beweglichen Mengenelementen konkret gezeigt werden. Insbesondere lässt sich mit beweglichen Mengenelementen nachvollziehbar verdeutlichen, warum in einer Vergleichssituation mit zwei vorliegenden Mengen die Subtraktion des Subtrahenden gleichgesetzt werden kann mit der Unterschied-Bestimmung: Es bleibt genau die Differenz „liegen“/übrig: Der Unterschied zwischen beiden Mengen ist genau die nach der Extraktion des Subtrahenden verbleibende Restmenge.