
KARDINALE UND ANDERE NUTZUNGEN VON ZAHLEN

2



2 KARDINALE UND ANDERE NUTZUNGEN VON ZAHLEN

Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer

Didaktische Ziele

- die wesentlichen Zahlaspekte (Kardinalzahl, Ordnungszahlzahl, Maßzahl, Rechenzahl und Codierung) kennen und unterscheiden
- Ordnungszahl „Platz in einer Reihenfolge“ und Kardinalzahl „Anzahl von etwas“ sicher unterscheiden
- Schreib- und Sprechweise von Ordnungszahlen kennen und richtig benutzen
- Schreib- und Sprechweisen sowie Darstellungsformen von Kardinalzahlen kennen und richtig benutzen
- beim Abzählen unübersichtlicher Mengen günstige Zählstrategien anwenden

- beim Abzählen unübersichtlicher Mengen die Zählprinzipien (Eins-zu-eins-Zuordnung, Konstanz der Menge, Zahlwortreihe...) einhalten
- Kriterien für Abzählbarkeit kennen und beschreiben, ob ein Zusammenfassen verschiedener Elemente sinnvoll ist und für zusammenfassbare Gruppen Oberbegriffe nennen

Notwendige fachliche Voraussetzungen

- Einsicht in die Invarianz von Mengen (Eine Menge bleibt gleich groß, wenn kein Element entnommen oder hinzugefügt wird.)
- Ziffern schreiben
- Zahlwortreihe vorwärts bis mindestens 10

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Ein fehlendes oder nur rudimentär vorhandenes kardinale Zahlverständnis ist häufig ein fundamentales Wissensdefizit von *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* und oftmals ein großes Hindernis beim Erlernen mathematischer Grundlagen. Den Teilnehmer*innen dieses Kurses soll in den folgenden Stunden deutlich werden, dass Zahlen die Anzahl von etwas angeben können und in diesem Sinne die Antwort auf die Frage „Wie viele?“ sind (kardinaler Zahlbegriff). Im Kontrast dazu ist bei einem Großteil der *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* ein überwiegend ordinal geprägtes Zahlverständnis ausgeprägt. Trifft ein solches dominantes ordinales Zahlverständnis mit einem nicht oder nur rudimentär vorhandenen kardinalen Zahlbegriff zusammen, dann wird Rechnen vor allem als Vor- und Zurückschreiten an einer Zahlenreihe verstanden. Mit diesem Vorgehen ist kein verständiges Operieren mit Zahlen und Mengen möglich. Unter Umständen müssen ähnliche Aufgaben immer wieder neu ausgezählt werden. Nur wenn verstanden wurde, wie Mengen und somit auch Zahlen zueinander in Beziehung stehen, kann beispielsweise der Zusammenhang zwischen folgenden Gleichungen erkannt werden:

$$\begin{array}{l} 9 + 3 = 12 \qquad \qquad 3 + 9 = 12 \\ 12 - 3 = 9 \qquad \text{und} \qquad 12 - 9 = 3 \end{array}$$

Nach der Lösung von $9 + 3$ müssen die Aufgaben $3 + 9$; $12 - 3$ und $12 - 9$ nicht erneut berechnet werden¹.

Um das kardinale Zahlverständnis zu fördern, werden die Teilnehmer*innen erfahren, dass die Anzahl immer die Gesamtmenge an Zählobjekten bezeichnet (kardinaler Zahlbegriff) und nicht nur das zuletzt gezählte Objekt (ordinaler Zahlbegriff). Werden beispielsweise neun Bücher abgezählt, meint die Neun in diesem Fall alle Bücher und nicht nur das neunte Buch.

Wenn deutlich geworden ist, dass mit Mengen und Zahlen auf die Eigenschaft „Anzahlhaftigkeit“ fokussiert wird, dann folgt daraus, dass die Reihenfolge der Objekte bei der Ermittlung der Anzahl unwesentlich ist. Entscheidend ist nur die Anzahl der Objekte. Jedes einzelne Objekt entspricht der Anzahl eins. Das Zusammenfassen der Einer/Einser führt zu einer Gesamtmenge, der gesamten Anzahl an Objekten.

Im Unterrichtskonzept 2.1 wird die Vielzahl der Verwendungen von Zahlen, d.h. die verschiedenen Zahlnutzungen, thematisiert. Die Stundenkonzepte zum DVV-Rahmencurriculum verfolgen nicht nur das Ziel, die Teilnehmer*innen zu sicheren Rechner*innen zu machen, sondern auch den Blick auf Zahlen und

die Mathematik zu komplettieren. Zahlen sind eben nicht ausschließlich zum Rechnen da. Sie erfüllen eine Vielzahl weiterer Funktionen. Zahlen werden auch zum Codieren, Messen, Operieren und zur Angabe eines Rangplatzes genutzt. Mit der Verwendung des **Aufgabenblattes 2.1 a** hat die Kursleitung die Möglichkeit zu überprüfen, ob alle Teilnehmer*innen die Beispiele zur Zahlnutzung selbstständig den Kategorien zuordnen können.

Im letzten Teil des 2. Kapitels wird der Blick auf Zahlen und Mengen noch weiter geschärft. Es werden mathematische Erfahrungen und mögliche Schwierigkeiten im Anfangsunterricht anhand von Zählfehlern reflektiert (2.3). Abschließend wird der Gehalt von Zahlen mit verschiedenen Übungen zur Darstellung bzw. Weitergabe von Zahlen greifbarer gemacht (2.4). Beide Unterkapitel dienen der Reflektion der eigenen Lernhistorie und der Auseinandersetzung mit Zahlen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Zahlen dienen nicht nur der Betrachtung von Mengenänderungen durch Wegnahme (Subtraktion), Hinzufügen (Addition), Verteilen/Einteilen (Division) oder Vervielfachen (Multiplikation), sondern erfüllen über die Rechenoperationen hinaus eine Vielzahl weiterer Funktionen. Ist dies nicht verstanden, könnte jede Textaufgabe als Auftrag zum Operieren mit allen im Text befindlichen Zahlen verstanden werden. Durch die Weitung des Blickes auf Zahlen und deren Nutzungsmöglichkeiten sind die Teilnehmer*innen dazu angehalten, den Kontext und den Zweck der Zahlnutzung zu prüfen, bevor eine Aufgabe gelöst wird. Die Erprobung der vorliegenden Unterrichtskonzepte hat gezeigt, dass die Beschäftigung mit den unterschiedlichen Nutzungskontexten von Zahlen – ohne dass die Teilnehmer*innen *sofort losrechnen* – zu deutlich besseren Ergebnissen bei der Bearbeitung von Sach- und Textaufgaben führt.

Bezüglich des kardinalen Zahlbegriffs könnten die Teilnehmer*innen missverstehen, dass beim Abzählen einer Menge die Zahl nur den zuletzt gezählten Gegenstand bezeichnet (ordinaler Zahlbegriff²). Es liegen beispielsweise sechs Stifte auf dem Tisch und auf die Frage, wo denn nun die (An-) Zahl Sechs zu finden sei, zeigt die*der Teilnehmer*in auf den zuletzt gezählten Stift, anstatt auf alle sechs Stifte zu verwei-

sen. Diese Logik führt – konsequent weiter gedacht – dazu, dass das Operieren mit Zahlen lediglich als Auftrag verstanden wird, die Zahlreihe vor- oder rückwärts abzuschreiten. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Teilnehmer*innen mathematischer Grundbildungskurse während ihrer Schulzeit Ordinalität und Kardinalität nicht richtig voneinander trennen konnten und u. a. dieser Fehlgedanke das mathematische Lernen beeinträchtigt hat.

Werden Zahlen nicht als Anzahlen gedacht, muss nach erfolgreicher Lösung der Aufgabe $9 + 3$ die Aufgabe $3 + 9$ erneut *ausgezählt* werden. Hierbei fallen häufig Zählfehler um eins auf, weil einerseits nicht immer klar ist, an welcher Position mit dem Zählen begonnen werden muss. Andererseits erfordert das einzelne Abschreiten der Zahlenreihe bei gleichzeitiger Buchführung über die Zähl Schritte ein hohes Maß an Konzentration. Die Fehleranfälligkeit ist deutlich erhöht. Die Fehleranfälligkeit erhöht sich beim Operieren mit größeren Mengen noch einmal, da eine größere Anzahl an Zähl Schritten notwendig ist. Die Aufgabe $9 + 3$ wird deshalb von einigen *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* schneller gelöst werden können als die Aufgabe $3 + 9$.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Um sich mit dem kardinalen Zahlaspekt auseinanderzusetzen, bedarf es eines abgesicherten Wissens um die Invarianz von Mengen: Eine Menge bleibt gleich groß (sie ist invariant), wenn kein Element entnommen oder hinzugefügt wurde. Des Weiteren sollten den Teilnehmer*innen die Ziffern und Zahlwörter zu den Zahlen bis zehn bekannt sein.

Weitere Ausführungen zum Thema der Invarianz von Mengen können Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen im Unterpunkt 1.1.1 Eins-zu-Eins-Zuordnung und Invarianzverständnis (S. 12) nachlesen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

Hintergrundwissen zum kardinalen Zahlaspekt finden Sie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen im Unterpunkt 1.2.6 *Wie viel? Der kardinale Zahlaspekt* (S. 28 ff)

Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): *DVV-Rahmencurriculum Rechnen*. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.

- Zum Invarianzverständnis bezogen auf Mengen: *Stufe 1, S. 12*
- Zum Zählen und Abzählen: *Stufe 1, S. 13 ff.*
- Zur Klassifikation und Seriation: *Stufe 1, S. 15 f.*
- Zu den Darstellungsformen von Zahlen: *Stufe 1, S. 25 f.*
- Zur Nutzung der Zahl als Kardinalzahl: *Stufe 1, S. 29 ff.*
- Zur simultanen Zahlerfassung: *Stufe 1, S. 30 f.*
- Zehner- und Einer-Begriff: *Stufe 1, S. 38 f.*

www.grundbildung.de

V Welche Materialien werden benötigt?

- Gespräch – 2.1 Zahlnutzung: ca. 20 – 30 Karteikarten
- Aufgabenblätter – 2.1 Zahlnutzung: einige Scheren und Klebestifte
- Gespräch – 2.2 Der kardinale Zahlaspekt: Platzkarten mit Ordnungszahlen von 1. bis 10.
- Gespräch/Gruppenarbeit – (Ab)Zählfehler und Zählprinzipien: eine große und unüberschaubare Menge an Steckwürfeln, Wendeplättchen, Chips o. ä.
- Partner*innenübung – 2.4 Formen der Darstellung und Weitergabe von Zahlen: ca. 20 – 30 Karteikarten