



2.4 Formen der Darstellung und Weitergabe von Zahlen

EXPLORATION

Ziel der folgenden Übungen und der sich jeweils anschließenden Auswertungsgespräche ist eine intensivere Auseinandersetzung mit der Darstellung bzw. Weitergabe von Anzahlen. Historisch wurden Zahlen und Ziffern entwickelt, um Anzahlen zu beschreiben – die Anzahl der Schafe einer Herde oder der Krüge in einem Vorratsraum. So bestand die gleiche Frage damals wie heute: Wie kann eine Anzahl weitergegeben werden? Dabei gibt es die Möglichkeit, dass die Bedeutung einer Zahl (also die mit ihr beschriebene Anzahl) sichtbar bleibt – oder unsichtbar wird. Das meint zunächst, ob eine Zahl mengenhaft oder nicht mengenhaft (als Ziffer oder Zahlwort) dargestellt wird.

Bei der mengenhaften Darstellung wird deutlich, dass Zahlen aus Einern bestehen und jede nachfolgende Zahl immer einen Einer mehr enthält als die vorhergehende Zahl. Bei Ziffern und Zahlwörtern hingegen wird die Anzahl der Einer, d.h. die Mächtigkeit, nicht so ohne Weiteres erkannt. Das Wissen, dass die Ziffer 5 fünf Einer und die Ziffer 6 einen Einer mehr als 5 meint – nämlich sechs Einer – ist fundamental, erschließt sich aber bei nichtmengenhaften Zahldarstellungen nicht. Deshalb soll auch herausgearbeitet werden, dass das Nichtwissen um die Mächtigkeit von Zahlen (der kardinale Zahlbegriff) und die Diskrepanz zwischen abstrakten und mengenhaften Zahldarstellungen Ursache eines erschwerten mathematischen Lernprozesses während der Schulzeit gewesen sein kann.

2.4.1 Partnerübung Weitergabe von Zahlen

Didaktisches Ziel

Notationsformen und andere Möglichkeiten der Darstellung von Zahlen (Schreiben als Zahlwort oder in Zifferschreibweise, Zeichnen mit Symbolen, Zeigen oder Sprechen) kennen und benutzen

Die visuelle Weitergabe von Zahlen (Schreiben und Zeichnen)

Zuerst sollte der Kurs in Zweiergruppen eingeteilt werden. Die Kursleitung flüstert nun einer Person eine Zahl zu. Sollte dies nicht möglich oder erwünscht sein, kann die Zahl auch auf einem Blatt notiert werden. Nachteilig an der letzteren Vorgehensweise ist jedoch, dass die geschriebene Zahl schon eine Möglichkeit der visuellen Zahlweitergabe darstellt.

Nun wird diese Person dazu aufgefordert, die Zahl auf einer Karteikarte oder einem Zettel zu notieren und anschließend der*dem Übungspartner*in zu überreichen. Wichtig ist der Hinweis, dass die Art der Zahlweitergabe jedes Mal variieren muss. Das fördert die Kreativität und das Nachdenken über Zahlen. Dieses Vorgehen sollte jedes Übungspaar mehrmals durchspielen. Dabei sollten die Rollen wechseln.

Ist die Zahl richtig angekommen?

Folgende Möglichkeiten werden bei der geschriebenen oder gezeichneten Zahl mit großer Wahrscheinlichkeit vorkommen:



Abbildung 2.4-1 Beispiele für Karteikarten visuelle Zahlweitergabe

Haben alle Teilnehmer*innen ihre Zahlen weitergegeben, so sollte in einem Auswertungsgespräch ausgetauscht werden, welche Notationsformen sie gewählt haben.

Ideensammlung

Folgende Fragen regen die Ideensammlung an:

Hat jemand eine besonders interessante Form gefunden? Welche der Notationen waren eindeutig und verständlich?

Welche Formen der Notation haben verwirrt oder zu Fehlern geführt?

Die Ergebnisse sollten an der Tafel notiert werden.

Gruppierung

Anschließend werden die Ergebnisse gruppiert und kategorisiert. Dabei können folgende Fragen hilfreich sein:

Welche Formen der Zahlnotation sind ähnlich bzw. gehören zusammen?

Welche Zahlnotationen passen nicht zusammen?

Hier sollte insbesondere auf den Unterschied zwischen den abstrakten Notationsformen (Ziffer/Zahlsymbol und Zahlwort) und den Formen, bei denen die Anzahl der Einer erkennbar ist, hingewiesen werden. Die Anzahlhaftigkeit (der kardinale Zahlbegriff) ist für das mathematische Grundverständnis elementar und anhand der heute üblichen Zahldarstellungen mithilfe der arabischen Ziffern ist die Anzahl nicht ablesbar.

Begriffsfindung

Sind die Antworten gruppiert, können Begriffe gefunden werden. Dazu kann gefragt werden:

Was haben diese Formen der Verschriftlichung gemeinsam?

Was ist bei diesen Zahlen anders als bei den anderen?

Mögliche Begriffe für die verschiedenen Notationsformen sind:

- die Zahlnotation mit Ziffern
- die Notation als Zahlwort oder
- eine unmittelbar die Anzahl darstellende (kardinale) ikonische bzw. bildliche Darstellung.

Die visuelle Weitergabe von Zahlen (Zeigen)

Diese Übung verläuft ähnlich der oben genannten Übung. Die Teilnehmer*innen können neue Zweier-teams bilden und jede*r bekommt anschließend verschiedene Zahlen gesagt oder auf einer Karteikarte notiert.

Nun sind die Teilnehmer*innen dazu angehalten, Ihrer*Ihrem Übungspartner*in die Zahl mitzuteilen, und zwar ohne Stimme (ohne Worte oder Laute), ohne andere Geräusche und ohne die Zahl zu notieren – nur durch Zeigen.

Auch bei diesem Übungsteil sollten die Rollen wechseln und die Teilnehmer*innen sollten dazu angehalten werden, sich immer eine andere Art des Zeigens zu überlegen. Sollte doch auf das Schreiben oder auf Laute zurückgegriffen werden, kann die Kursleitung die Bedingungen auch an der Tafel notieren:

- ohne Geräusche
- nicht aufschreiben

Mögliche Formen des Zeigens einer Zahl können sein:

- Fingermengen
- Winkeralphabet
- mit Händen und Füßen
- Morsezeichen

Im Anschluss an die Übung werden die Möglichkeiten der Zahlweitergabe durch Zeigen gesammelt.

Ideensammlung

Hat jemand eine besonders interessante Form des Zeigens gefunden? Welche Form des Zeigens war eindeutig und verständlich?

Welche Form des Zeigens hat verwirrt oder zu Fehlern geführt?

Die Ergebnisse sollten an der Tafel notiert werden. Es sollte deutlich sein, dass auch bei der visuellen Darstellung durch Zeigen kardinale und nichtkardinale Darstellungen möglich sind. Das Winkeralphabet, Morsezeichen und manche Formen der Darstellung mit Händen und Füßen arbeiten nichtkardinal. Bei diesen Darstellungen muss (ebenso wie bei unseren arabischen Zahlsymbolen) die Konvention der Darstellung bekannt sein, um aus den Darstellungen die beschriebene Anzahl ablesen zu können.

Gruppierung

Anschließend werden die Ergebnisse gruppiert und kategorisiert. Dabei helfen folgende Fragen:

Welche Formen des Zeigens einer Zahl waren ähnlich bzw. gehören zusammen?

Welche Formen des Zeigens passen nicht zusammen? Warum passen sie nicht zusammen bzw. sind nicht ähnlich?

Auch in dieser Phase sollten die mengenhaften und nichtmengenhaften Zahlen unterschieden werden.

Bei welchen Formen des Zeigens haben Sie die Anzahl der Einer erkannt?

Bei welchen Formen des Zeigens ist nicht erkennbar, wie viele Einer die Zahl hat?

Begriffsfindung

Sind die Antworten gruppiert, können Begriffe gefunden werden. Dazu kann gefragt werden:

Was haben diese Formen des Zeigens einer Zahl gemeinsam?

Was ist bei dieser Form anders?

Gruppe ein Begriff (Begriffsfindung) gesucht. Auch hier sind die Formen der „*abstrakten Zahl-laute*“ und der „*mengenhaften Laute*“ zu trennen.

Folgende Formen der akustischen Zahlweitergabe werden bei dieser Übung auftauchen:

- Zahlnamen/-worte
- Klopfzeichen
- Laute und Geräusche (entsprechend der Anzahl)
- Morsezeichen

RÜCKSCHAU

Mit diesen Übungen haben sich alle Teilnehmer*innen nochmals intensiv mit Zahlen, Mengen, Ziffern und Zahlworten und deren Gemeinsamkeiten und Unterschieden auseinandergesetzt. Es gibt wesentliche Unterschiede zwischen den Zahldarstellungen.

Zum Rechnen muss die Mächtigkeit einer Zahl bekannt sein. Die Anzahl ist jedoch bei Ziffern und Zahlworten nicht unmittelbar zu erkennen.

Die Teilnehmer*innen haben sich intensiv mit dem Gehalt einer Zahl beschäftigt, damit was eine Zahl ausmacht, was deren Alleinstellungsmerkmal ist und sie deshalb von den anderen Zahlen unterscheidet.

2.4.2 Die akustische Weitergabe von Zahlen

Für den letzten Teil der Zweierübung sollte sichergestellt werden, dass sich die Teilnehmer*innen, die nun ihre Zahlen austauschen, nicht sehen können. Dazu könnte eine mobile Wand oder Tafel zwischen die Personen geschoben werden. Möglich wäre auch, dass die Teilnehmer*innen mit dem Rücken zueinander sitzen.

Jetzt erhalten die Teilnehmer*innen wieder Zahlen auf Karteikarten und müssen diese akustisch weitergeben. Es darf nichts notiert oder gezeigt werden.

Auch hier sollten sich die Teilnehmer*innen abwechseln, sodass jede*r mal Sender*in und Empfänger*in ist.

Im Anschluss werden die Möglichkeiten der akustischen Übermittlung von Zahlen nach dem oben bereits beschriebenen Schema gesammelt (Ideen-sammlung), gruppiert (Gruppierung) und für jede

ENDNOTEN

- 1 Wird nach $9 + 3$ die Aufgabe $3 + 9$ erneut berechnet, ist davon auszugehen, dass die Aufgabe ausgezählt wurde. Da viele Zähler*innen nicht wissen, wie leichter gerechnet kann (sonst würden sie es so machen), nennen sie das Auszählen häufig Rechnen. Rechnen, so wie wir es verstehen, meint allerdings nicht nur das Lösen einer Aufgabe, auf welchem Wege auch immer, sondern impliziert ein Wissen um Mengen, Zahlen, Zahlzusammenhänge, Rechenoperationen, den Zahlaufbau und die mathematisch-logische Anwendung dessen. Ist dieses Wissen vorhanden, muss eine Aufgabe auch nicht mehr ausgezählt werden.
- 2 Ein ordinaler Zahlbegriff ist an sich nicht falsch. Zum Begreifen der Mathematik benötigt man einen ordinalen sowie einen kardinalen Zahlbegriff.
- 3 Mit dem Begriff „Kapitänsaufgaben“ sind Aufgaben gemeint, die auf den ersten Blick wie normale Textaufgaben aussehen sollen. Sie sind aber aufgrund fehlender Informationen nicht lösbar oder die Antwort ist bereits im Aufgabentext enthalten. Menschen mit Rechenproblemen neigen dazu, die enthaltenen Zahlen „irgendwie“ zu kombinieren und auszurechnen.
- 4 Der kardinale Zahlaspekt ist nicht an Gegenstände gebunden. Anstatt „acht Kekse“ kann auch abstrakt „es sind acht“ gesagt werden. Zum Thema Abstraktionsprinzip befinden sich Ausführungen im Kapitel 2.3 und die Oberbegriffsbildung wird in Kapitel 2.2 thematisiert.