Inhaltsverzeichnis

13 MULTIPLIKATION

(Alina Guther unter Mitarbeit von Wolfram Meyerhöfer)

I Was soll in diesem Themenbereich verstanden bzw. routinisiert werden?

Die Multiplikation ist für *Menschen mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen* mit vielen Fehlschlüssen behaftet. Im Vergleich zur Addition und Subtraktion ist das Vervielfachen einer Menge abstrakter. Denn beim Multiplizieren wird nicht einfach eine Menge hinzugefügt bzw. weggenommen, sondern eine Menge wird vervielfacht. Demzufolge ist das Nachvollziehen der Mengenhandlung anhand der Gleichung schwieriger als bei Addition und Subtraktion. Ein weiterer Unterschied ist, dass die Teilmengen nicht direkt an der Aufgabe – an den Faktoren – abgelesen werden können. Auch dieser Aspekt führt dazu, dass die Mengenhandlung, also das, was mit den Mengen passiert, schwieriger nachzuvollziehen ist. Ist den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nicht deutlich, was auf der Mengenebene passiert, können Mal-Aufgaben schließlich nicht her- bzw. abgeleitet[1] werden.
Die Hauptfrage der Multiplikation „Wie viel sind es insgesamt?“ ist dieselbe wie bei der Addition. Da diese Frage jedoch mit der Addition und mit dem „Dazutun“ einer Menge assoziiert wird, stellt die Herausarbeitung der Hauptfrage eine weitere Hürde beim Verstehen der Operationslogik dar.

Demzufolge sind die wichtigsten Erkenntnisse, die die Teilnehmer/-innen bezüglich der Multiplikation aus diesem Kurs mitnehmen sollten, folgende:

- Wie bei Addition und Subtraktion ist es auch bei der Multiplikation essenziell, ein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation zu entwickeln. Mengenhaft-dynamisch meint, dass den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bewusst ist, was mit den Mengen bei einer multiplikativen Handlung passiert. Denn nur aus der Logik, dass bei $3 \cdot 2$ dreimal eine Zweiermenge vorhanden ist ($2 + 2 + 2 = 6$), lässt sich verstehen, dass $3 \cdot 2$ insgesamt sechs sind.

- Die Teilnehmer/-innen sollten nach der Bearbeitung der nachfolgenden Unterrichtskonzepte wissen, wie Multiplikation und Addition in Zusammenhang stehen. Dies erleichtert einerseits die mengenhafte Vorstellung ($3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 \rightarrow$ die Zwei ist drei Mal vorhanden), andererseits sind sie damit in der Lage, eine Aufgabe wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ in $6 \cdot 4$ umzuwandeln und folglich komplizierte Rechenwege (das einzelne Addieren der Vieren) zu vermeiden.

- Aus dem Wissen über den mathematischen Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation ergibt sich der nachfolgende Erkenntnisschritt: Wenn bekannt ist, dass $6 \cdot 4$ das Gleiche meint wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, dann können die Teilnehmer/-innen auch erkennen, dass aus $5 \cdot 4 = 20$ die Aufgabe $6 \cdot 4$ abgeleitet werden kann. Sie wissen z. B., dass $5 \cdot 4$ insgesamt zwanzig sind und zu $6 \cdot 4$ nur noch eine Vier hinzuaddiert werden muss. Das sind dann $6 \cdot 4 = 24$.

- Alle Möglichkeiten zur Ableitung von Mal-Aufgaben, die im Kapitel *Das kleine Einmaleins* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.2) thematisiert werden, basieren auf dem Wissen um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation bei einem gleichzeitig vorhandenen mengenhaft-dynamischen Verständnis der Rechenoperationen.

- Wichtig ist weiterhin, welche Frage die Multiplikation eigentlich immer beantwortet. Oder anders: Warum sollte ich Mal-Aufgaben ausrechnen? Was möchte ich damit erfahren?

Beispiel:

Drei Kinder haben jeweils zwei Kugeln Eis bekommen.
$3 \cdot 2$ Eiskugeln = 2 Eiskugeln + 2 Eiskugeln + 2 Eiskugeln = 6 Eiskugeln

Egal, welche Sachsituationen zu verschiedenen Mal-Aufgaben erdacht werden, am Ende steht immer die

[1] Die Substantive *Herleitung* und *Ableitung* und die Verben *ableiten* und *herleiten* werden in diesem Text synonym verwendet.

Frage danach, wie viele es insgesamt sind. Dieselbe Frage wie bei der Addition, denn jede Multiplikations-Aufgabe kann in eine Additions-Aufgabe umgeschrieben werden.

- Wenn Mal-Aufgaben in eine Mengenhandlung überführt werden, haben der erste und der zweite Faktor unterschiedliche Funktionen. Die Teilnehmer/-innen werden sich vielleicht noch aus der Schulzeit daran erinnern, dass es egal ist, ob man $5 \cdot 4$ oder $4 \cdot 5$ rechnet. Dies ist allerdings nur teilweise korrekt. Richtig ist: Für die Gesamtmenge, d. h. für die Lösung der Aufgabe, ist es nicht relevant, ob $5 \cdot 4$ oder $4 \cdot 5$ gerechnet wird. Beide Aufgaben haben dieselbe Lösung zur Folge. Für das mengenhaft-dynamische Verständnis und die Umwandlung von Additions- in Multiplikationsaufgaben macht es jedoch einen Unterschied.
  Denn $5 \cdot 4$ entspricht der Additions-Aufgabe $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ und $4 \cdot 5$ entspricht der Additionsaufgabe $5 + 5 + 5 + 5$. Haben die Teilnehmer/-innen nicht verstanden, dass der erste Faktor angibt, wie viele Teilmengen vorhanden sind (der zweite Faktor gibt an wie groß eine Teilmenge ist), werden sie Probleme haben, Mal-Aufgaben herzuleiten. Nur wenn die Operationslogik verstanden ist, und dazu zählt auch die Funktion des ersten und zweiten Faktors, können Mal-Aufgaben abgeleitet werden. Dies verdeutlicht nachfolgendes Beispiel für eine falsche Herleitung der Mal-Aufgabe $6 \cdot 4$.

Beispiel für die falsche Herleitung einer Multiplikations-Aufgabe, resultierend aus einem mangelnden Wissen um die unterschiedliche Bedeutung der Faktoren:

$6 \cdot 4$	$\rightarrow$	$5 \cdot 4$	$+$	**6 (!)***
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$	$\rightarrow$	$4 + 4 + 4 + 4 + 4$	$+$	**6 (!)***

Erst wird $5 \cdot 4 = 20$ gerechnet. Das ist hilfreich und eine der Aufgaben, die relativ schnell routinisiert werden. Anschließend wird fälschlicherweise eine Sechs anstatt der fehlenden sechsten Vier zur Zwanzig hinzugerechnet. Diese Art von Rechenfehler entsteht aus einer Unsicherheit bezüglich der unterschiedlichen Funktion des ersten und zweiten Faktors.

- Die Teilnehmer/-innen sollen nach der Erarbeitung der *Operationslogik der Multiplikation* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.1) auch die Folgen eines Faktorentausches beschreiben können. Der Tausch der Faktoren macht für die zu ermittelnde Gesamtmenge, d. h. für die Beantwortung der Frage „Wie viele haben wir insgesamt?“, keinen Unterschied. Jedoch gewinnt der Tausch der Faktoren bei Betrachtung einer Sachsituation an Bedeutung.

Beispiele:

Drei Kinder bekommen jeweils zwei Eiskugeln. Zusammen haben sie nun 6 Eiskugeln. Die Eltern bezahlen sechs Kugeln Eis:

$3 \cdot 2$ Eiskugeln = 6 Eiskugeln

Werden die Faktoren jedoch getauscht, entsteht eine andere Gleichung und demzufolge auch eine andere Sachsituation:

$2 \cdot 3$ Eiskugeln = 6 Eiskugeln

Zwei Kinder erhalten jeweils drei Kugeln Eis. Insgesamt sind sechs Kugeln zu bezahlen.

Es macht einen Unterschied, ob drei oder nur zwei Kugeln Eis gegessen werden können und ob drei oder nur zwei Personen ein Eis erhalten.
Gleich ist jedoch, dass in beiden Situationen die Frage „Wie viele Eiskugeln sind es insgesamt?“ bzw. „Wie viele Eiskugeln müssen insgesamt bezahlt werden?“ die Antwort „sechs“ nach sich zieht. Denn für die Gesamtmenge macht es keinen Unterschied, ob $2 \cdot 3$ oder $3 \cdot 2$ gerechnet wird.

- Im Kapitel *Das kleine Einmaleins* (vgl. RC Rechnen: Praxismaterial, Stufe 2, Kapitel 13.2) ist ein Weg zum Herleiten und anschließenden Routinisieren des kleinen Einmaleins beschrieben. Das Erlernen des Einmaleins wird in diesem Kurs nicht dadurch erreicht werden, dass die Teilnehmer/-innen alle Aufgaben auswendig lernen. Das haben die Teilnehmer/-innen während ihrer Schulzeit mit ziemlicher Sicherheit schon versucht. Selbst wenn durch Auswendiglernen einige Aufgabensätze bekannt sind, ist dieses Wissen, ohne Kenntnis der Operationslogik, nicht übertragbar und somit auch nicht für Ableitungen nutzbar.
  Vielmehr soll in den nachfolgenden Unterrichtskonzepten das bereits vorhandene Wissen der Teilnehmer/-innen genutzt und erweitert werden, sodass infolgedessen alle Aufgaben des kleinen Einmaleins und später auch Multiplikationsaufgaben mit größeren Zahlen abgeleitet werden können. Um Mal-Aufgaben abzuleiten, ist es unabdingbar, sich mit der Zerlegung von Faktoren zu beschäftigen.

  Wenn die Lösung der Aufgabe $4 \cdot 8$ nicht bekannt ist, können die Teilnehmer/-innen zwischen verschiedenen Rechenwegen wählen. Alle hier vorgestellten Rechenwege haben gemeinsam, dass dabei der erste Faktor zerlegt wird.

Beispiele:

$\mathbf{4} \cdot 8 = \mathbf{2} \cdot 8 + \mathbf{2} \cdot 8 = 16 + 16 = 32$

Die Vier wurde in zwei und zwei zerlegt. Jeder Faktor muss wiederum mit acht multipliziert werden.

$\mathbf{4} \cdot 8 = \mathbf{5} \cdot 8 - \mathbf{1} \cdot 8 = 40 - 8 = 32$

Die Vier wurde in fünf und minus eins zerlegt. Auch die Zerlegung in negative Faktoren ist möglich.

$\mathbf{4} \cdot 8 = \mathbf{3} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 8 = 24 + 8 = 32$

Die Vier kann auch in drei und eins zerlegt werden.

Die Teilnehmer/-innen werden auf Zerlegungen zurückgreifen, von welchen sie die Mal-Aufgaben bereits im Kopf haben. Manche Teilnehmer/-innen favorisieren die Addition von Zahlen, weshalb sie eher selten in negative Faktoren zerlegen.

II Welche Verständnisschwierigkeiten treten typischerweise auf?

Eine Verständnisschwierigkeit ist, dass nach 10 · *irgendeine Zahl* Schluss mit den Mal-Aufgaben wäre. Folgendes Wissen über die Multiplikation ist dann noch nicht sicher:

- Entweder der Zusammenhang von Addition und Multiplikation ist noch nicht komplett erschlossen. Dann wissen die Teilnehmer/-innen, dass $10 \cdot 6$ das Gleiche bedeutet wie $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass es möglich ist, immer noch eine weitere Sechs zu addieren. Dann ist die Sechs z. B. elfmal oder zwölfmal vorhanden.

- Oder es ist noch kein mengenhaft-dynamisches Verständnis für die Rechenoperation vorhanden. Denn dann wäre bekannt: Wenn ich in zehn Monaten jeweils 6 € sparen kann, können auch im elften Monat wieder 6 € gespart werden. 11 · 6 € = 66 €. Jetzt wären insgesamt schon 66 € gespart worden.

Kursleiter/-innen sollten unbedingt auf das unfreiwillige Vertauschen der Faktoren beim Herleiten von Mal-Aufgaben achten. Wenn nicht klar ist, dass $6 \cdot 4$ das Gleiche bedeutet wie $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, kann es passieren, dass beim Herleiten zwar Bezug auf $5 \cdot 4 = 20$ genommen wird, dann aber fälschlicherweise noch eine 6 addiert wird. Hier wird es nicht von Erfolg gekrönt sein, weiter die Herleitung von Mal-Aufgaben zu üben. Es muss das Grundverständnis, d. h. die Operationslogik der Multiplikation, ausgebaut werden.

Ist kein umfassendes Operationsverständnis für die Multiplikation vorhanden, dann kann es passieren, dass die Teilnehmer/-innen nur einen Weg zum Herleiten der Mal-Aufgaben kennen. Die Kursleitung sollte immer auch nach weiteren Möglichkeiten der Herleitung fragen. Es kann sein, dass sich die Teilnehmer/-innen jeden einzelnen Weg zur Herleitung gemerkt, also Rechenwege auswendig gelernt haben.

Ein Beispiel: Ein/-e Teilnehmer/-in kann Achtmal-Aufgaben nur über den Weg fünfmal *die Zahl* und dann noch dreimal *die Zahl* lösen ($5 \cdot \_\_ + 3 \cdot \_\_$). Bei manchen Aufgaben könnte aber über zehnmal *die Zahl* minus zweimal *die Zahl* schneller hergeleitet werden ($10 \cdot \_\_ - 2 \cdot \_\_$).

Dazu nachfolgend ein Vergleich.

Beispiele:

$8 \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = \mathbf{10 + 6} = 16$ $8 \cdot 9 = 5 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = \mathbf{45 + 27} = 72$

Achtmal-Aufgaben über Fünfmal-Aufgaben herleiten.

$8 \cdot 2 = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = \mathbf{20 - 4} = 16$ $8 \cdot 9 = 10 \cdot 9 - 2 \cdot 9 = \mathbf{90 - 18} = 72$

Achtmal-Aufgaben über Zehnmal-Aufgaben herleiten.

Bei der Aufgabe $8 \cdot 2$ haben beide Rechenwege – der über fünfmal die Zwei und der über zehnmal die Zwei – einen ähnlichen Schwierigkeitsgrad.

Bei der Aufgabe $8 \cdot 9$ hingegen ist der Weg über $10 \cdot 9$ etwas leichter als die Lösung über $5 \cdot 9$ herzuleiten. Wenn $10 \cdot 9 - 2 \cdot 9$ gerechnet wird, enthält die Rechnung keinen Zehnerübergang (90 – 18 anstatt 45 + 27). Bei Teilnehmerinnen und Teilnehmern, die ausschließlich über Fünfmal-Aufgaben herleiten, auch wenn eine andere Herleitung schneller zur Lösung führen würde, sollten Kursleiter/-innen überprüfen, welche Gründe es für die einseitige Herleitungsstrategie gibt. Es besteht die Möglichkeit, dass entweder die Operationslogik der Subtraktion oder der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen noch nicht vollständig verstanden wurde. Gibt es Unsicherheiten innerhalb dieser beiden Themengebiete – der Operationslogik oder dem Zahlaufbau –, ist das Lösen von Minusaufgaben schwieriger als das Lösen von Additionsaufgaben.

Wissenslücken und nicht übertragbares Wissen führen oft dazu, dass Mal-Aufgaben mit größeren Zahlen oder Divisionsaufgaben nicht mehr gelöst werden können. Die Kursleitung fragt aus diesem Grund immer auch nach weiteren Möglichkeiten zur Herleitung der Mal-Aufgabe: „Wie könnte die Aufgabe $8 \cdot 8 = ?$ noch hergeleitet werden?“, „Wie können Sie $8 \cdot 8 = ?$ mithilfe der Aufgabe $10 \cdot 8$ ausrechnen?“.[2]

Zählen manche Teilnehmer/-innen immer wieder die einzelnen Malreihen hoch (z. B. die 5er-Reihe: 5 … 10 … 15 … 20 … 25 … 30 … 35 usw.), kann dies entweder die Folge einer sehr lang praktizierten Strategie sein oder der Hinweis auf ein fehlendes Operationsverständnis. Auch in diesem Fall fragt die Kursleitung nach, wie man z. B. auch von $10 \cdot 5 = 50$ auf $5 \cdot 5$ ableiten kann. Wenn dies beantwortet werden kann, durchbricht die Kursleitung die Gewohnheiten der Teilnehmer/-innen, indem nicht nur nach einer Mal-Aufgabe gefragt wird, sondern von vorgegebenen Aufgaben abgeleitet wird. Können Teilnehmer/-innen nicht ableiten, ist unbedingt das Grundverständnis für die Multiplikation weiter auszubauen.

III An welche Themenbereiche knüpft dieses Unterrichtskonzept direkt an?

Vor der Beschäftigung mit der Operationslogik der Multiplikation müssen die Teilnehmer/-innen wissen, dass Zahlen Anzahlen beschreiben (*kardinaler Zahlbegriff*). Außerdem sollten sie, aufgrund des operationalen Zusammenhangs, die Operationslogik der Addition und Subtraktion verstanden haben. Da die Teilnehmer/-innen sich zur Lösung von Aufgaben des kleinen Einmaleins im Zahlbereich bis 100 bewegen müssen, soll einerseits der Zahlaufbau zweistelliger Zahlen verstanden sein und andererseits muss sicher bis 100 addiert und subtrahiert werden können.

[2] Wenn der/die Teilnehmer/-in z. B. immer den Weg $5 \cdot 8 + 3 \cdot 8$ wählt, könnte eine andere Aufgabe vorgegeben werden. Hat der/die Teilnehmer/-in ein umfassendes Operationsverständnis, dann kann er/sie auf Nachfrage auch von $10 \cdot 8$ auf $8 \cdot 8$ schließen.

IV Wo finden sich didaktische Erläuterungen?

- Meyerhöfer, Wolfram; Hartmann, Christian; Jahnke, Thomas; Wollring, Bernd (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  > Stufe 2 – Operationslogik der Multiplikation, S. 102–106.
  > Stufe 2 – Erwerb des kleinen Einmaleins, S. 102–106.
  > Stufe 2 – Multiplikation mit mehrstelligen Zahlen, S. 107 ff.

- Meyerhöfer, Wolfram; Guther, Alina; Grütte, Dagmar; Weilke, Cornelia (2017): DVV-Rahmencurriculum Rechnen: Praxismaterial. Erarbeitet im Auftrag des Deutschen Volkshochschul-Verbandes e. V. Bonn.
  > Stufe 1 – Kapitel 3, S. 17
  www.grundbildung.de/unterricht

V Welche Materialien werden benötigt?

- *Kursgespräch und Partnerarbeit – Mengenhandlung Multiplikation:*
  Für jedes Team 15 Gegenstände (Steckwürfel, Wendeplättchen, Stifte, Büroklammern o. Ä.)
- Kapitel 13.2:
  Jede/-r Teilnehmer/-in erhält einen Satz Mengenbilder aus der KOPIERVORLAGE *Mengenbilder*.
- *Kursgespräch – Zehnmal:*
  Pro Kursteilnehmer/-in ein laminiertes Hunderterfeld und ein Folienstift
- *Spiel Einmaleins würfeln:*
  > Je Zweierteam einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 10, einen Sechserwürfel und Klebezettel (zum Bekleben und Beschriften des Sechserwürfels)
  > eventuell Spielgeld