



## 9.4 Zahlen visualisieren

### Didaktische Ziele

- anhand unterschiedlicher Darstellungen das Wissen über zweistellige Zahlen festigen
- Ordnungsprinzipien zweistelliger Zahlen erforschen

### EXPLORATION

Wenn Ordnung geschaffen wird, wenn Strukturen erzeugt werden, sind Bündelungen weitverbreitet. Auch da, wo diese zunächst nicht vermutet werden. Indem die Teilnehmer\*innen Alltagsbezüge und Bezüge zum Umgang mit Größen herstellen, entwickelt sich ihr Zahlverständnis im Zahlbereich bis 100. Dabei sind Visualisierungen sehr hilfreich. Daraus kann auf die Beziehungen der Zahlen geschlossen werden.

### 9.4.1 Hausaufgabe – Zehnerbündel im Alltag

Im Alltag wird häufig gebündelt. Die Kursleitung bittet die Teilnehmer\*innen, *Zehnerbündel des Alltags* zu identifizieren und mit ihrem Smartphone zu fotografieren sowie gemeinsam zu überlegen, wie die Prämierung des ersten bis dritten Platzes einer „Hitliste“ vollzogen wird. In der darauf folgenden Stunde erstellen die Teilnehmer\*innen aus den Fotos (die sie sich gegenseitig zeigen) die Hitliste „Zehnerbündel des Alltags“. Zum Beispiel könnten diese Fotos ausgedruckt und im Unterrichtsraum aufgehängt werden. Das könnten zum Beispiel Zehnerpackungen Schokolade oder Großpackungen mit Kosmetikartikeln sein.

Kleine Wettbewerbe machen Spaß und bleiben positiv in Erinnerung. Die Fokussierung auf Zehnerbündel deswegen, weil direkte Bezüge zu dem dekadischen Zahlssystem hergestellt werden können. Es ist einfacher, im Alltag andere Bündelungsformate zu finden (z. B. Fünferpackungen).

## 9.4.2 Aufgabenblatt 9.4 a und Kursgespräch – Darstellung von Zahlen

### Didaktisches Ziel

zweistellige Zahlen als (gebündelte) Zehner und (ungebündelte) Einer darstellen

### EXPLORATION

Es gibt unterschiedliche Visualisierungen, um Zehner und Einer übersichtlich darzustellen. Visualisierungen unterstützen die Entwicklung der Vorstellungen von Zahlen. Die Darstellung dient der Wiederholung des bisher Gelernten. Die Teilnehmer\*innen interpretieren zunächst (möglichst selbstständig) die bereits vorgegebene Darstellung. Es sind jeweils zehn Zehner nebeneinander dargestellt. In jedem Zehner sind zehn Einer visualisiert. Jedes einzelne Kästchen in der Abbildung symbolisiert einen Einer.

Für die Zahl, die visualisiert werden soll, muss erkannt werden, wie viele Zehner und wie viele Einer (ungebündelt) vorliegen. Dieses Wissen soll auf die Darstellung übertragen werden, zum Beispiel, indem Zehner vollständig (jeweils ein Zehnerfeld wird markiert) und Einer einzeln (entsprechende Anzahl von Einern markieren) übertragen werden.

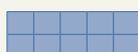
AUFGABENBLATT 9.4 a

Die Kursleitung verteilt das **Aufgabenblatt 9.4 a Darstellungen** (Bearbeitungsdauer ca. 10 Minuten) und erläutert die Aufgabe.

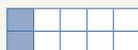
Stellen Sie die Zahlen jeweils mit Hilfe der Kästchen dar. Bemalen Sie dabei die entsprechende Anzahl von Kästchen. Es sind immer zehn Zehner nebeneinander. Jeder Zehner bündelt zehn Einer. Jedes Kästchen entspricht einem Einer.



Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen



Visualisierung eines Zehners durch farbiges Ausmalen



Visualisierung von zwei Einern durch farbiges Ausmalen

Mit dem **Aufgabenblatt 9.4 a** sollen die Teilnehmer\*innen ihren Wissensstand zum Zahlbereich bis 100 selbstständig prüfen. Die Kursleitung beantwortet eventuell auftretende Fragen. Aus der Art und Weise, wie die Teilnehmer\*innen das Aufgabenblatt bearbeiten, kann die Kursleitung Rückschlüsse auf den jeweiligen Lernstand ziehen und möglicherweise Wiederholungen planen.

Ziel ist es, selbstständig in der vorliegenden Visualisierung die Zehnerfelder und darin eingebettet die zehn Einer zu erkennen und zu nutzen.

Die Aufgabe wird gemeinsam ausgewertet. Wenn Teilnehmer\*innen beschreiben können, dass bei 42 vier Zehnerfelder markiert werden müssen und zusätzlich zwei einzelne Einer, zeigt das, wie gut sie die Zehnerbündelung verstanden haben. Die Kursleitung achtet auf die Verbalisierung und ermutigt die Teilnehmer\*innen, ihre Lösungen vorzutragen.

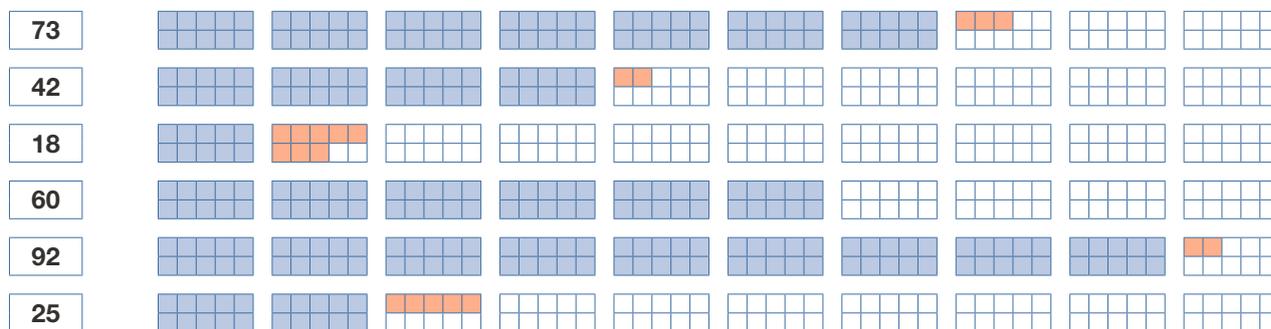


Abbildung 9.4-1 Lösungsblatt 9.4 a

### 9.4.3 Gruppenarbeit und Kursgespräch – Anordnung von 100 Elementen

#### Didaktisches Ziel

Einführung von Hunderterfeld mit Fokus auf kardinalen Zahlaspekt (Zehner im Hunderterfeld auf verschiedene Art identifizieren)

#### EXPLORATION

Eine weitere, häufig verwendete Visualisierungsform ist die sogenannte *Hundertertafel*. Einigen Teilnehmer\*innen wird der Gebrauch der Hundertertafel durchaus geläufig sein, denn sie haben früher in der Schule mithilfe der Hundertertafel gerechnet. Nachfolgend soll der Versuch unternommen werden, dass sich die Teilnehmer\*innen diese Hunderterdarstellung erschließen und diese als eine von vielen Visualisierungsformen des Zahlbereichs bis 100 interpretieren. Wichtig ist es, beim Veranschaulichen und beim Vertiefen des bisher Erlernten die Zehner/Einer-Struktur (Dezimalstruktur) zu erkennen.

**Einzuprägen für den Zahlbereich bis 100 ist Folgendes:  
Darstellungen mittels graphischer Elemente veranschaulichen Mengen. In Hunderterdarstellungen lassen sich Zehner und Einer identifizieren. Insgesamt sind 100 Einer geordnet/strukturiert dargestellt.**

Das Zahlssystem ohne Veranschaulichung nutzen zu können, ist das eigentliche Lernziel: In Hundert sind zehn Zehner enthalten und in jedem Zehner zehn Einer, damit sind in einem Hunderter auch 100 Einer enthalten.

Wir nutzen hier das sogenannte Hunderterfeld (Abb. 9.4-2 ff.). Da Studien gezeigt haben, dass das Hunderterfeld keineswegs selbsterklärend ist, sollte es nicht beiläufig verwendet werden, sondern nur, wenn seine Struktur im Kurs gründlich besprochen werden kann. Nur dann kann es lernförderlich genutzt werden. Verzichtet wurde auf die Variante der sogenannten Hundertertafel, bei der in jedes Feld zeilenweise und zeilenübergreifend aufsteigend eine Zahl von 1

bis 100 eingetragen wird, da hierzu Forschungsbelege vorliegen, die zeigen, dass die Hundertertafel in der Regel eher verwirrt als das Verständnis fördert.

#### DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Die Kursleitung bittet die Teilnehmer\*innen in Zweiergruppen folgende Aufgabe zu lösen.

*Ich bitte Sie, 100 Elemente so zu legen, dass man möglichst einfach überprüfen kann, dass es wirklich 100 Elemente sind.*

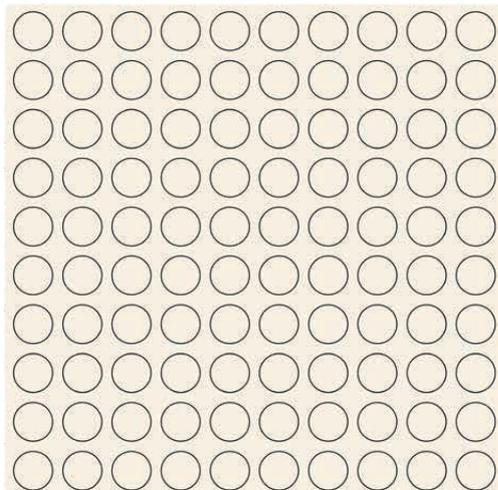
Als Elemente eignen sich 100 Chips, kleine Holzwürfel, Ein-Cent-Stücke, Ein-Euro-Stücke usw.

Die Kursleitung prüft, welche Ideen die Teilnehmer\*innen entwickeln, und stellt diese anschließend vor. Alle Teilnehmer\*innen gehen von Tisch zu Tisch und tauschen sich über die vorgeschlagenen Anordnungen aus.

*Wie kann man einfach überprüfen, dass es auch tatsächlich 100 Elemente sind? Erklären Sie, was Sie gemacht haben.*

Eine Möglichkeit ist, zehn Bündelungen mit zehn unsortierten Elementen zu legen.

Mit hoher Wahrscheinlichkeit kommt ein Team (wenn nicht sogar alle Teams) auf die Idee, zehn Reihen mit jeweils zehn Elementen, z. B. Chips, aufzulegen – die sogenannte 10-mal-10-Anordnung.

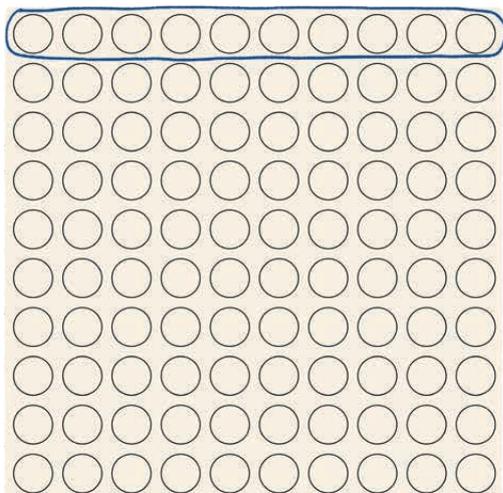


**Abbildung 9.4-2** Das Hunderterfeld – Zehn Reihen zu je zehn Chips – 10-mal-10-Anordnung

*Das ist eine gute Lösung, denn die 100 Elemente sind übersichtlich angeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Zehner zu bestimmen, z. B.: Die erste Reihe ist ein Zehner mit zehn Einern. Bei zwei Reihen sind es zwei Zehner mit insgesamt 20 Einern usw.*

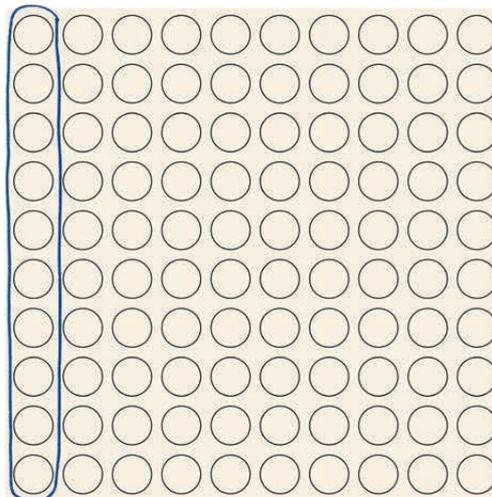
Die Kursleitung zeigt an der Abbildung reihenweise die Zehner. Dabei werden die Zehner umfahren (Zeigestab, Stift, Zeigefinger).

*Eine Reihe bildet einen Zehner ab. Es sind zehn. Zwei Reihen enthalten zwei Zehner, es sind zwanzig usw.*



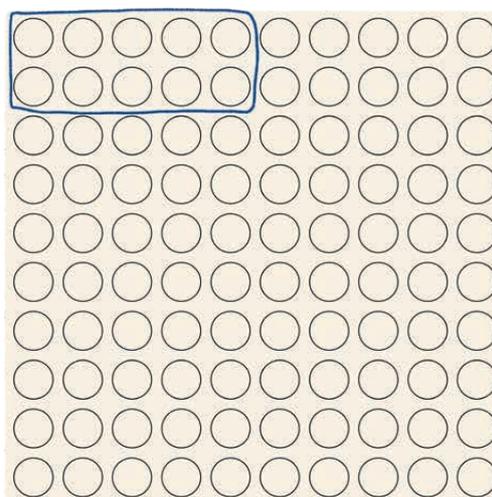
**Abbildung 9.4-3** Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 1

*Hier ist die erste Spalte ein Zehner. So sind drei Spalten drei Zehner bzw. 30 Einer.*



**Abbildung 9.4-4** Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 2

*Einen Zehner kann man auch so, wie diese Abbildung zeigt, bestimmen.*



**Abbildung 9.4-5** Anordnung der Zehner in der 10-mal-10-Anordnung – Version 3

*Die erste Version ist üblich. Eine Reihe entspricht einem Zehner.*

Die Kursleitung bittet einzelne Teilnehmer\*innen, verschiedene Zahlen an der Abbildung zu zeigen.

Zum Beispiel: 47.

Vier Reihen entsprechen vier Zehnern, dazu kommen sieben Einer. Wichtig ist, dass man dabei die gesamten 47 Kreise gekennzeichnet werden. Denn 47 entspricht 47 dargestellten Kreisen. Das sind vier Reihen (Zehner) und weitere sieben einzelne Kreise (Einer):

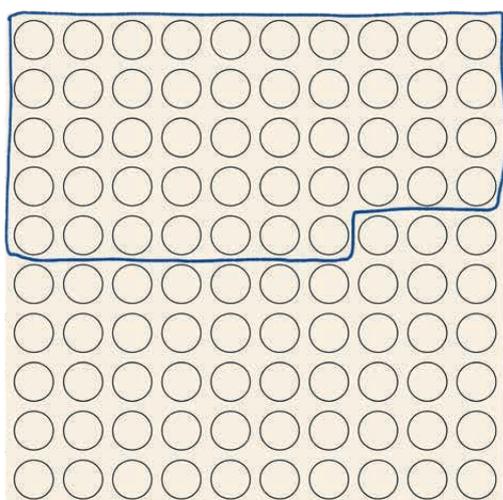


Abbildung 9.4-6 Darstellung der 47

## RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer\*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Für den Zahlbereich bis 100 wurden hier weitere Visualisierungen besprochen. Diese Veranschaulichung, Visualisierung bzw. Zahldarstellung dient dazu, Vorstellungen vom Zahlbereich zu entwickeln: Welche Mengen stellen die Zahlen dar? Und umgekehrt: Wie können größere Mengen strukturiert werden? Welche wiederkehrenden Ordnungsprinzipien sind erkennbar?
- Die wesentlichen Merkmale sind: In der 100 sind zehn Zehner enthalten und in einem Zehner sind zehn Einer enthalten, demzufolge sind in der Hundert 100 Einer enthalten.

## 9.4.4 Kursgespräch – Wie werden Längen eingeteilt?

### Didaktisches Ziel

Zahlenstrahl über das Messen mit dem Lineal kennenlernen

### EXPLORATION

Metermaß, Lineal und Zahlenstrahl stellen Abstände oder Längen dar. Während Lineal oder Metermaß in erster Linie zum Messen von Längen da sind, hat der Zahlenstrahl vor allem eine Visualisierungsfunktion. Auch hier sind Strukturen, Muster bzw. Ordnungsprinzipien erkennbar: Alle drei sind unterteilt. Meist in Form von kleinen und größeren Strichen/Markierungen. Die Abstände zwischen den Strichen/Markierungen sind gleich groß. Wie hängt das zusammen? Was wird damit angezeigt? Die gleich großen Abstände stehen jeweils für eine bestimmte Zahl und sie wiederholen sich. Oft sind Zahlen bis 100 erkennbar. Auch hier wird auf die Einteilung in Einer und Zehner zurückgegriffen.

### DURCHFÜHRUNG UND DIDAKTISCHE HINWEISE

Den Teilnehmer\*innen werden Metermaß und Lineal bekannt sein. Zielführende Fragestellungen regen die Diskussion an, die Längeneinteilungen unter dem Aspekt Einer/Zehner/Hunderter zu analysieren. Es geht in dieser Unterrichtssequenz noch nicht darum, sich mit Längenmaßen im Detail zu beschäftigen.

Was haben Metermaß und Lineal mit dem Zahlbereich bis 100 zu tun?

Können Sie beschreiben, wie man Metermaß bzw. Lineal einteilt? Wozu braucht man diese? Zeichnen Sie die Einteilung an der Tafel.

Folgende Erkenntnisse sollten gewonnen werden:

- Ein Metermaß bzw. ein Lineal sind regelmäßig eingeteilt.
- Die Abstände zwischen den Markierungen sind immer gleich groß.
- Es gibt kurze Markierungen und längere Markierungen.
- Am Metermaß sind Zahlen bis 100 (oder auch 150 oder mehr) fortlaufend notiert.
- Zehner oder Fünfer sind hervorgehoben.
- Lineale enthalten fortlaufende Zahlen in der Regel bis 17 oder 30.

Die Kursleitung erläutert:

*Die gleichen Abstände auf dem Metermaß und dem Lineal stehen für jeweils einen Zentimeter. Jeder Zentimeter besteht aus zehn Millimetern. Dabei ist jeweils der Fünfer markiert. Einhundert Zentimeter sind ein Meter. Man fügt, bildlich gesprochen, Zentimeter um Zentimeter zusammen, bis es schließlich einhundert Zentimeter wie beim Metermaß (oder wie beim Lineal 17 Zentimeter) sind. Die Zahlen, die auf dem Metermaß sind, stehen dabei für die Zahl der Zentimeter. In dieser Abbildung zum Beispiel für sieben Zentimeter.*

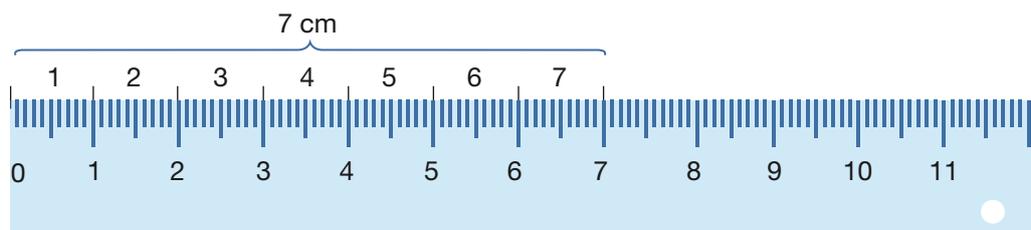


Abbildung 9.4-7 Die Zahl 7 auf dem Metermaß entspricht sieben Zentimetern

## AUSBLICK

Ein Millimeter, ein Zentimeter, ein Meter sind universelle Längeneinheiten. Umrechnungen und Einteilungen sind später Gegenstand der Betrachtungen.

*Ganz ähnlich ist es beim Zahlenstrahl. Je nachdem, welchen Zahlbereich man darstellen möchte, kann der Zahlenstrahl anders aussehen. In dieser Abbildung sieht man den Zahlbereich bis zehn. An jeder Markierung steht eine Zahl von 0 bis 10. Normalerweise stehen die Zahlen direkt an den Markierungen. Die Markierungen haben gleiche Abstände. Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie man den Zahlenstrahl deuten kann:*

*Steht die Markierung selbst für die Zahl? Das heißt, ist die Drei die vierte Markierung? Der Zahlenstrahl zeigt Positionen und damit den Ordinalaspekt der Zahlen.*

*Oder zeigt jeder Abstand zwischen den Markierungen einen Einer? Zeigen drei Abstände oder sogenannte Längeneinheiten die Drei? Hier ist eine Ähnlichkeit zu Metermaß und Lineal zu sehen.*

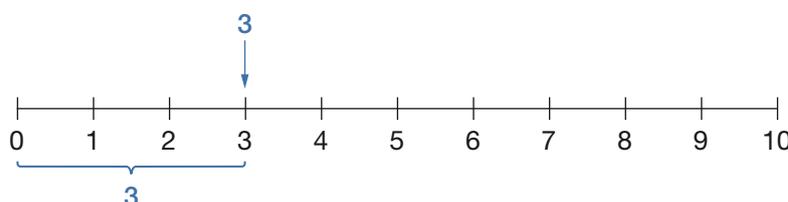


Abbildung 9.4-8 Zahlenstrahl bis 10

Mit der zweiten Möglichkeit kann man zum Beispiel die Addition darstellen.

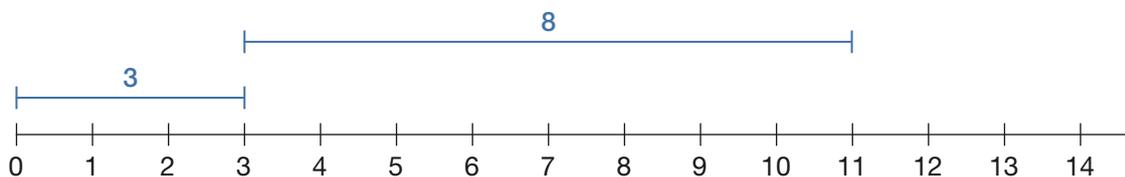


Abbildung 9.4-9 Zahlenstrahl: 3 und 8 sind 11

So, wie in der Abbildung 9.4-9 dargestellt: 3 und 8 sind zusammen 11. Die Zahlen 3 und 8 sind drei und acht Längeneinheiten, die man zu 11 Längeneinheiten zusammenfassen kann. Die Vorstellung, dass Drei und Acht jeweils Markierungen/Punkte des Zahlenstrahls sind, kann nicht die Addition  $3 + 8 = 11$  erklären. Denn Markierungen/Punkte kann man nicht addieren.

Wenn man umgekehrt als Deutung der Zahlen nur Längen zulässt, dann wird eine Zahlverortung möglicherweise unübersichtlich: Man kann nicht zeigen, wo die Vier im Vergleich zur Drei steht. Der Zahlenstrahl ermöglicht die Deutung der Zahlen als Markierungen/Punkte und als Längen. Beide Sichtweisen geben eine breite Blick auf Zahlen, beide Sichtweisen haben aber auch Probleme in der Deutung.

Hier ist ein Zahlenstrahl von 0 bis 100 dargestellt – mit Zehnerabständen, -einteilungen oder -längeneinheiten.

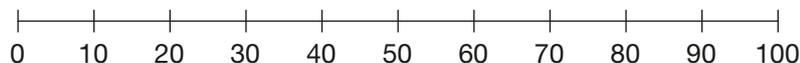


Abbildung 9.4-10 Zahlenstrahl bis 100

Das heißt, zwischen den Markierungen befinden sich neun weitere Zahlen. Zwischen zehn und zwanzig sind das 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. Das kann man in der Darstellung des Zahlenstrahls nicht direkt erkennen. Es sind sogenannte Zehnerschritte dargestellt. Man kann sich vorstellen, dass eine Längeneinheit die Zahl Zehn ist.

Hier ist ein Zahlenstrahl mit Fünferabständen oder Fünfereinteilungen. Es gibt weitere Markierungen, die für die Zahlen dazwischen stehen.

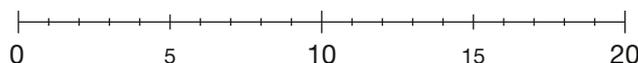


Abbildung 9.4-11 Zahlenstrahl mit Fünferabständen

Man kann fehlende Zahlen ergänzen.

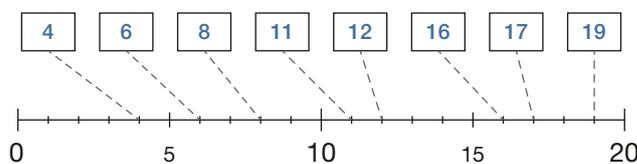


Abbildung 9.4-12 Eintragen von Zahlen am Zahlenstrahl

### EMPFEHLUNG

Die Interpretation des Zahlenstrahls mithilfe von Längeneinheiten ist weiterführender. Damit können Bezüge zu Längenmaßen hergestellt und Rechenoperationen erläutert werden. Wichtig bleibt die Betonung, dass es eine Visualisierungsform des entsprechenden Zahlbereiches ist.

### RÜCKSCHAU

Die Teilnehmer\*innen sollten Folgendes verstanden haben:

- Der Zahlbereich wurde von 10 auf 100 erweitert. Das Zusammenfassen von zehn *Einern* zu einem *Zehner* und das Zusammenfassen von zehn *Zehnern* zu einem *Hunderter* kann vielfältig veranschaulicht werden. Die in den Darstellungen erkannte Ordnung und Struktur wurde verallgemeinert und auf das Zahlssystem übertragen.
- Die Zehn ist die maßgebliche Bezugseinheit für das gesamte, heute gebräuchliche dezimale Zahlssystem. Zehn Einer werden zu einem Zehner zusammengefasst. Zehn Zehner werden zu einem Hunderter zusammengefasst. Zehn Hunderter zu einem Tausender usw. Entlang dieses Bündelungsprinzips ist das *Stellenwertsystem* konstruiert. Die Bündel werden Stellen zugeordnet.
- Es ist ein Ordnungsprinzip, das Zahlen strukturiert und aus dem die Werte der Zahlen ablesbar sind. Alle Zahlen im dekadischen Zahlssystem können mit nur zehn Ziffern notiert/konstruiert werden.
- Für das Stellenwertsystem gilt: Wenn es zehn auf einer Stelle sind, dann wird eine neue Stelle besetzt. Diese Stelle wird links davor geschrieben. Beginnend mit Einern heißt das, wenn es zehn Einer sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Zehnerstelle. Die Zahl ist zweistellig. Wenn es zehn Zehner sind, wird die Stelle links davor besetzt – die Hunderterstelle. Jetzt ist die Zahl dreistellig. Das Stellenwertsystem ist damit beliebig erweiterbar. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist, wird dafür eine Null geschrieben.
- Die Schreib- und Sprechweisen der Zahlen bis 100 weisen einige Unregelmäßigkeiten auf. Bedeutend ist die Erkenntnis, dass die Zehner und Einer in einer anderen Reihenfolge aufgeschrieben werden als das Zahlwort gesprochen wird. Für vierundsechzig wird 64 aufgeschrieben.
- Einteilungen von Längen erfolgen strukturiert in Einheiten. Gleiche Abstände entsprechen gleichen Zahlen. Zunächst muss also analysiert werden, wofür welche Einheit, welcher Abstand steht. Welche Zahlen/Längen sollen dargestellt werden? Das ist bei dem Metermaß bzw. Lineal genauso wie beim Zahlenstrahl. Sowohl Metermaß und Lineal als auch ein Zahlenstrahl werden u. a. dafür genutzt, einen begrenzten Zahlbereich, eingeteilt in Längeneinheiten, darzustellen.

### ENDNOTEN

- 1 Näheres vgl.: Wolfram Meyerhöfer: Zweizehneins, Zwanzigeins, Einundzwanzig. Skizze einer stellenwertlogisch konsistenten Konstruktion der Zahlwörter im Deutschen. Pädagogische Korrespondenz, Heft 52, 2-2015, S. 21–41.
- 2 Gelegentlich berichten Lehrkräfte, dass sie zeitweise mit alternativen Zahlbenennungsmethoden arbeiten und dass dies den Lernenden hilft, die Zahlstrukturen zu verstehen und für effektives Rechnen zu verwenden. Auch ein Switchen in die herkömmliche Zahlbenennung sei dann nicht weiter problematisch.
- 3 Gaidoschik (2007/2015), S. 173